Iniciación a la investigación y la innovación en educación matemática

Colección
MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Coordinadora:
Inmaculada Tello

NO fotocopies el libro

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de la propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sigs. Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (www.cedro.org) vela por el respeto de los citados derechos.

Iniciación a la investigación y la innovación en educación matemática

César Sáenz Castro
Aitzol Lasa Oyarbide

EDITORIAL
SINTESIS

Consulte nuestra página web: **www.sintesis.com**
En ella encontrará el catálogo completo y comentado

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente, por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquier otro, sin la autorización previa por escrito de Editorial Síntesis, S. A.

© César Sáenz Castro
Aitzol Lasa Oyarbide

© EDITORIAL SÍNTESIS, S. A.
Vallehermoso, 34. 28015 Madrid
Teléfono: 91 593 20 98
www.sintesis.com

ISBN: 978-84-9171-215-2
Depósito Legal: M. 25.027-2018

Impreso en España - Printed in Spain

Índice

Introducción 11

Parte I
Investigación e innovación en la enseñanza de las matemáticas de secundaria

1. *La didáctica de las matemáticas como área de conocimiento* 19

Objetivos 19
Glosario 19
1.1. Definición de didáctica de las matemáticas 19
1.2. Objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas 22
1.3. Teorías en didáctica de las matemáticas 23
1.4. Metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas 25
1.4.1. La figura del investigador 29
1.5. Relación de la investigación con la innovación en didáctica de las matemáticas 31
1.6. El profesor novel de enseñanza secundaria y la investigación e innovación educativa 36
Resumen 40

2. *Líneas de investigación en didáctica de las matemáticas* ... 41

Objetivos ... 41
Glosario ... 41
2.1. Introducción ... 42
2.2. El enfoque psicológico de la educación matemática ... 43
2.3. El enfoque de competencias y la educación matemática realista ... 50
2.4. La práctica reflexiva en el desarrollo profesional docente ... 55
2.5. Educación matemática crítica ... 56
2.6. La escuela francesa de didáctica de las matemáticas ... 59
2.7. La teoría de los registros de representación semiótica ... 66
2.8. La teoría de la actividad instrumentada ... 68
2.9. El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática ... 72
Resumen ... 76

3. *Las agendas y la calidad de la investigación en didáctica de las matemáticas. La difusión de los resultados de la investigación y la innovación* ... 77

Objetivos ... 77
Glosario ... 77
3.1. Agendas de investigación ... 78
3.1.1. Problemas de investigación relacionados con el alumno ... 78
3.1.2. Problemas relacionados con el contenido ... 80
3.1.3. Problemas relacionados con el profesor ... 80
3.1.4. Problemas de investigación relacionados con el contexto educativo ... 82
3.2. Calidad de la investigación en didáctica de las matemáticas ... 83
3.2.1. Criterios de calidad que se utilizan en los trabajos de investigación y en su difusión ... 85
3.2.2. Códigos de buenas prácticas en investigación ... 88
3.3. Foros de investigación en didáctica de las matemáticas ... 89
3.3.1. Foros en el ámbito nacional ... 89
3.3.2. Foros en el ámbito internacional ... 90
3.4. Fuentes documentales y medios de difusión en educación matemática ... 92
3.5. La difusión de los resultados en innovación educativa ... 95
Resumen ... 98

Parte II
Investigación, innovación y áreas curriculares

4. *Conexiones matemáticas* 101

Objetivos 101
Glosario 101
4.1. La estructura del saber matemático 102
4.2. El principio del currículo 104
4.3. Conexiones en programas instruccionales 110
4.3.1. El salto de primaria a secundaria: cursos 6.º de EP a 2.º de ESO 110
4.3.2. Entrando en materia: cursos 3.º de ESO a 2.º de bachillerato 113
4.4. Currículo real y evaluación realista 116
4.4.1. Metodología puzle y evaluación de contenidos algebraicos 117
4.4.2. Cómo seleccionar los estándares evaluables en cada caso 120
Resumen 122

5. *Desarrollo del pensamiento algebraico* 125

Objetivos 125
Glosario 125
5.1. Una visión histórica del álgebra 126
5.1.1. El álgebra como modelo geométrico 127
5.1.2. Valores cambiantes y funciones 129
5.1.3. Estructuras algebraicas 130
5.2. Estándares para la enseñanza del álgebra 131
5.2.1. Estándares algebraicos para primer ciclo de ESO 131
5.2.2. Estándares algebraicos para segundo ciclo de ESO y bachillerato 134
5.3. Modelo teórico de niveles de adquisición del álgebra 137
5.4. Vías abiertas de investigación en pensamiento algebraico 141
5.4.1. *Early algebra* 142
5.4.2. Cuestionar y replantear el conocimiento actual 143
5.4.3. Uso de tecnologías en la enseñanza del álgebra 145
Resumen 146

6. *Combinatoria, probabilidad y estadística* 149

Objetivos 149
Glosario 149
6.1. Una visión histórica de la combinatoria y del azar 149

6.2. Estándares para la enseñanza de la estadística y el azar 154
6.2.1. Análisis de datos y probabilidad para primer ciclo de ESO 155
6.2.2. Análisis de datos y probabilidad para segundo ciclo de ESO y bachillerato 158
6.3. Innovación en combinatoria, estadística y probabilidad 163
6.3.1. Notable ausencia de la combinatoria 163
6.3.2. Enfoque frecuencial de la probabilidad 164
6.3.3. Alfabetización estadística y lectura de gráficos 166
Resumen 168

7. *Desarrollo del pensamiento geométrico* 171

Objetivos 171
Glosario 171
7.1. Una visión histórica de la geometría 172
7.2. Estándares para la enseñanza de la geometría 176
7.2.1. Geometría para primer ciclo de ESO 177
7.2.2. Geometría para segundo ciclo de ESO y bachillerato 182
7.3. Niveles de razonamiento geométrico 188
7.4. Innovación en geometría 189
7.4.1. Una nueva clasificación de los argumentos 190
7.4.2. Un posible obstáculo didáctico en NVH2 191
7.4.3. Elementos algebraicos en el razonamiento geométrico 192
Resumen 193

8. *Funciones y análisis* 195

Objetivos 195
Glosario 195
8.1. Una visión histórica del análisis 195
8.2. El lenguaje de funciones y gráficas 200
8.2.1. Situación fundamental de la proporcionalidad 201
8.2.2. Identificación y relación de nociones funcionales 203
8.2.3. Operaciones con nociones funcionales 205
8.3. Líneas actuales de investigación 207
8.3.1. Formación del profesorado 207
8.3.2. Modelización funcional en el aprendizaje del álgebra 208
8.3.3. Función real de variable real 208
Resumen 209

Parte III
Calidad y buenas prácticas en educación matemática

9. ***Calidad de la enseñanza matemática y evaluaciones internacionales*** .. 213

Objetivos 213
Glosario 213
9.1. Introducción 214
9.2. Principales estudios sobre rendimiento en matemáticas 217
9.3. Marco teórico y tareas matemáticas de la evaluación de PISA 218
9.4. El rendimiento en matemáticas según los resultados PISA 225
9.4.1. Promedio de España dentro de PISA 226
9.4.2. Sesgos y asimetrías de los datos de España 227
9.4.3. Lo que nos dice PISA de nosotros mismos 227
9.5. Crítica a la utilización de los estudios internacionales 230
Resumen 234

10. ***Las buenas prácticas como instrumento de mejora de la calidad de la enseñanza*** 237

Objetivos 237
Glosario 237
10.1. Noción de buenas prácticas en educación 238
10.2. Los factores afectivos en la educación matemática 242
10.3. La interdisciplinaridad y el trabajo por proyectos 246
10.4. Consideraciones sobre la evaluación del aprendizaje de los alumnos y el papel de los estándares de evaluación 250
10.5. La formación continua como buena práctica para el desarrollo profesional del docente 257
Resumen 261

11. ***La divulgación matemática y el aumento de la cultura científica de la ciudadanía*** 263

Objetivos 263
Glosario 263
11.1. El conocimiento matemático como cultura 263
11.2. Por qué la ciudadanía tiene que saber matemáticas 265

11.3. Analfabetismo matemático y sutileza de las matemáticas 270
11.4. La oportunidad de un enfoque interdisciplinar en la divulgación científico-matemática 272
11.5. La difusión de las matemáticas en actividades culturales 275
Resumen 279

Bibliografía seleccionada 281

2
Líneas de investigación en didáctica de las matemáticas

Objetivos

- Reflexionar sobre el papel de la teoría en la investigación en DM.
- Describir las principales corrientes, líneas y programas de investigación en DM caracterizados por dos parámetros: su potencia de comprensión y explicación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y su capacidad para evaluar y mejorar dichos procesos.
- Ofrecer al profesorado marcos teóricos para afrontar e interpretar su práctica docente e iniciar procesos de investigación e innovación.

Glosario

- PEM: Grupo de Psicología de la Educación Matemática, International Group of the Psychology of Mathematics Education.
- EMR: educación matemática realista.
- EMC: educación matemática crítica.
- DFM: didáctica fundamental de las matemáticas.
- TSD: teoría de situaciones didácticas.
- TAD: teoría antropológica de lo didáctico.
- TRRS: teoría de los registros de representación semiótica.
- TAI: teoría de la actividad instrumentada.
- EOS: enfoque ontosemiótico de lo didáctico.

2.1. Introducción

Hemos explicado en el capítulo 1 que se puede considerar la DM como una disciplina científica en cuanto que reúne las tres características o condiciones que define a un corpus de conocimiento como ciencia:

1. La existencia de un objeto de estudio bien definido.
2. La existencia de corrientes, líneas o programas de investigación, es decir, conjuntos de conocimientos (leyes, principios, teorías) consolidados y aceptados por la comunidad científica.
3. La existencia de métodos de investigación propios aplicables al crecimiento de este cuerpo de conocimientos.

Este capítulo va a detenerse con más detalle en la segunda condición. Efectivamente, se necesitan herramientas teóricas para comprender, interpretar o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (objeto de estudio de la DM). Ahora bien, las teorías científicas no pueden ser realizaciones aisladas; debe haber una comunidad de personas entre las que exista un acuerdo, al menos implícito, sobre los problemas significativos de investigación y los métodos aceptables de abordarlos. Las teorías son, pues, frutos de las líneas y programas de investigación sostenidas por una comunidad de especialistas en un campo determinado.

En DM no existe un único paradigma o teoría consolidada y aceptada por toda la comunidad de educadores matemáticos. La juventud de la disciplina y la complejidad de los fenómenos estudiados son factores que facilitan la coexistencia de escuelas o líneas competitivas en el campo de estudio con perspectivas teóricas diferentes.

Estas teorías pueden proceder de disciplinas generales (como la psicología, las neurociencias, la sociología, la lingüística, etc.), de modo que se puede establecer una primera categoría de investigaciones en DM que engloba estudios de tipo cognitivista, constructivista, sociocultural, antropológico, etc.

Otra posibilidad es considerar que los saberes importados de dichas disciplinas generales no son suficientes para explicar por sí mismos los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y, por tanto, es necesario crear líneas o programas de investigación propios del área de DM que proporcionen marcos teóricos específicos que aunque puedan estar relacionados con saberes generales sean autónomos de ellos al priorizar la singularidad del contenido matemático. Así, en esta segunda categoría se incluyen la teoría de las situaciones didácticas, la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque ontosemiótico, entre otros enfoques o teorías de impacto en educación matemática. Es el matemático quien, reflexionando sobre la enseñanza de las matemáticas, se convierte en didacta de las matemáticas al incorporar a su conocimiento profesional ideas procedentes de la epistemología, psicología, sociología, etc.

En lo que sigue se hará una breve introducción a algunas corrientes, líneas y programas de investigación de ambas categorías, tratando de explicitar su posicionamiento epistemológico (acerca de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza) y su aplicación a la comprensión y mejora de las prácticas docente y de la formación del profesorado. Es precisamente su impacto en las prácticas docentes el criterio fundamental de selección de dichas líneas de investigación.

2.2. El enfoque psicológico de la educación matemática

La psicología de la educación es una rama de la psicología que estudia los procesos de adquisición del conocimiento que realiza el ser humano. Sobre todo, desarrolla teorías del aprendizaje como ciencia básica (conductismo, cognitivismo, etc.) y los procesos de enseñanza los presenta, casi siempre, como ciencia aplicada o técnica que se derivan de una determinada teoría del aprendizaje.

Esta ciencia aplicada es la psicología de la instrucción, que incluye diferentes teorías o modelos instruccionales. Así, con una base conductista, se pueden citar las propuestas de Skinner y Gagné y con un fundamento cognitivista, la propuesta de referencia es el constructivismo que se desarrolla a partir de las teorías de Piaget, Vygotsky, Bruner y Ausubel, principalmente, y que tiene un gran impacto en la educación mundial, de modo que las leyes educativas de muchos países (incluida España, sobre todo la LOGSE de 1989) están impregnadas de la filosofía constructivista. No vamos a extendernos en la presentación de estas propuestas ya conocidas por los profesores a través de sus programas de formación inicial y continua pero sí queremos relacionarlas con la didáctica de las matemáticas.

En la década de 1980, la matemática moderna, que ha dominado la escuela en la década anterior, empieza a decaer y los contenidos explícitos al respecto desaparecen del currículo. Hay que decir que algunos profesores, fieles seguidores de la "matemática moderna", habían puesto los ojos en Piaget para justificar el acceso en edades tempranas a nuevos conocimientos matemáticos; por ejemplo, aunque la topología fuese una rama de muy reciente incorporación a la matemática, no por eso iba a ser inaccesible para los estudiantes; en sus aspectos más elementales, incluso se podría enseñar a los alumnos de preescolar. Piaget buscaba en la lógica matemática no solamente la base de las matemáticas mismas, sino también la de la organización de las estructuras cognitivas. Fueron varios los autores que trabajaron para adaptar el programa de matemáticas a la psicología evolutiva piagetiana. Dienes, quizá el más conocido, intentó un planteamiento de las "matemáticas modernas" basado en la manipulación de materiales y en la intuición a través de sucesivos pasos que, de manera inductiva, conducían a la generalización.

Finalmente, se reconoce que las "matemáticas modernas", reducidas a una caricatura de la teoría de conjuntos (los famosos diagramas de Venn, que los alumnos llamaban *huevos*), habían llevado a muchos estudiantes a desconocer la aritmética elemental, y empieza a asumirse que no tiene demasiada importancia que un alumno no sepa que un número racional es una clase de equivalencia, lo importante es que opere bien con fracciones. No existe un plan organizado de nuevos contenidos, pero hay un acuerdo tácito en volver a lo básico.

Se pensó entonces que, si el aprendizaje se regía por cierta lógica, esa no era la lógica estructuralista, formal-axiomática, propia de la ciencia matemática. La situación era propicia para que entrasen en escena las ideas provenientes de la psicología cognitiva: una nueva lectura de Piaget, la interacción cognitiva de Bruner y Ausubel, la interacción social de Vygotsky. En las facultades de ciencias de la educación, en los grupos de renovación pedagógica y en los centros de formación del profesorado, el aprendizaje sobre el aprendizaje multiplicó su presencia durante las décadas de los 80 y 90. Tuvieron gran influencia libros como *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (1980), de Skemp; *Didáctica de las Matemáticas* (1990) de Orton; y *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos* (1990), de Resnick y Ford.

Algunas preguntas que surgen del campo de la psicología de la instrucción son las siguientes:

- ¿Cuáles son algunas de las evidencias observables que pueden contribuir a relatar los procesos de cognición matemática de los alumnos?
- ¿El razonamiento (deductivo e inductivo) de las personas en situaciones de la vida cotidiana responde a modelos matemáticos?
- ¿Qué factores y cómo influyen en el rendimiento en matemáticas: cognitivos, metacognitivos, afectivos, actitudinales, de creencias, etc.?
- ¿En qué medida las diferencias de rendimiento en matemáticas asociadas a la variable “género” pueden ser interpretadas de forma aislada?

Tratemos de sintetizar algunas respuestas a esas preguntas. Una de las aportaciones más relevantes de la psicología cognitiva a la educación matemática es la distinción entre el conocimiento declarativo (conceptos) y el conocimiento procedimental: el método tradicional de enseñanza de las matemáticas pone un gran énfasis en el dominio de los algoritmos y su aplicación a ejercicios rutinarios, sin profundizar debidamente en la comprensión de los conceptos implicados y esto produce dificultades de aprendizaje. Por ejemplo, se pide representar la función:

$$y = x + \frac{1}{x}$$

La gran mayoría de alumnos de bachillerato calculan asíntotas, puntos de corte, máximos, mínimos, etc., utilizando técnicas del cálculo de límites y derivadas; muy pocos representan las funciones elementales, x y $1/x$, y las suman mentalmente para obtener el gráfico. Encontramos otro ejemplo en el cálculo de la integral:

$$\int_{-2}^{1} |x|\, dx$$

Muchos alumnos utilizan (erróneamente) su conocimiento procedimental y no el conocimiento conceptual adecuado, y en consecuencia la gran mayoría resuelve así el ejercicio:

$$\int_{-2}^{1} |x|\, dx = \left[\frac{|x|^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$$

Muy pocos comprenden que lo que se les pide es el cálculo del área de los siguientes triángulos de la figura 2.1, y para eso no se necesita calcular ninguna integral.

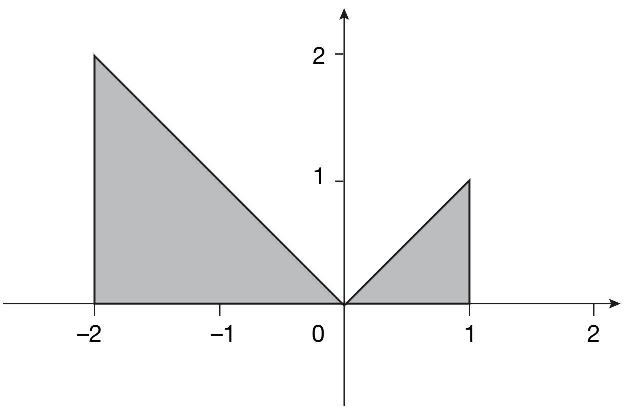

Figura 2.1. Cálculo elemental de una integral.

Actividad 2.1

En el siguiente ejercicio, bastantes alumnos de la ESO consideran erróneos los algoritmos de multiplicación utilizados y la gran mayoría son incapaces de justificar razonadamente la adecuación o inadecuación de estos.

Explica la conducta de los alumnos en función de la superior relevancia de los procedimientos sobre los conceptos en la práctica escolar.

a) ¿Podrías decir qué se ha hecho en cada caso?

b) ¿Consideras estos procedimientos válidos o no? ¿Por qué?

c) ¿Qué razones matemáticas darías para justificar lo adecuado o inadecuado de estos métodos para multiplicar?

Primera variante	*Segunda variante*	*Tercera variante*
23 ×	23 ×	23 ×
32	32	32
69	64	96
46	96	64
736	736	736

Una segunda aportación de la ciencia cognitiva al aprendizaje matemático tiene que ver con las formas de razonamiento que utilizan los seres humanos para enfrentarse a situaciones problemáticas. Se denomina heurísticos a estas estrategias de razonamiento que conducen a sesgos cognitivos, en cuanto que los resultados del razonamiento se apartan de los resultados proporcionados por la lógica formal matemática.

El razonamiento deductivo forma parte de la naturaleza de las matemáticas que utiliza el método hipotético-deductivo como herramienta fundamental de construcción y validación de conocimiento (basta recordar, por ejemplo, la potencia probatoria del método de demostración por reducción al absurdo). ¿Utilizan las personas las reglas de la lógica deductiva?

Para responder a esta pregunta, Wason (psicólogo cognitivo del University College of London) propone la conocida como *tarea de las cuatro tarjetas*: Supongamos que tenemos un mazo de cartas con colores en una cara y números en la otra; reparto las cartas y afirmo lo siguiente: las cartas con números pares siempre tendrán colores primarios en la cara opuesta. Ante los siguientes resultados: 5, morado, 8, rojo, ¿a qué dos cartas habría que darle la vuelta para comprobar que la afirmación es cierta? No se preocupe si no lo resuelve a la primera, es difícil: para confirmar la hipótesis solo hay que darle la vuelta a morado y a 8. Un cerebro entrenado en las reglas de la lógica condicional no habría tenido ningún problema. Pero menos de una cuarta parte de la gente encuentra solución al problema, incluso habiendo estudiado lógica. Este hecho indica que nuestros cerebros no están programados para problemas de lógica general de este tipo, y es de suponer que ello se deba a que nos ha ido bastante bien como especie sin necesidad de resolver este tipo de problemas de lógica.

Pero si el mismo problema se hubiera presentado de una manera en la que estamos programados para comprender (expresado en el lenguaje que interesa al cerebro humano social), entonces se habría resuelto con facilidad. Cambiemos el enunciado anterior por “Si usted tiene menos de 18 años, entonces no puede beber alcohol”. Las cartas llevan de un lado la edad y del otro la bebida: tequila, 33, Sprite, 16. En este caso casi todos los participantes le dan la vuelta a 16 y a tequila. Al cerebro le preocupa tanto la interacción social que ha desarrollado programas especiales dedicados a ella: funciones primitivas que abordan temas de derechos y obligaciones. En otras palabras, su psicología ha evolucionado para solucionar problemas sociales, como por ejemplo detectar a los tramposos, pero no para ser inteligente y lógica en general. El quid de la cuestión, dentro de un contexto de educación matemática, sería dar el salto, liberar a la lógica de ataduras tanto emocionales como evolutivas y ser capaz de aplicar el esquema de razonamiento lógico formal a cualquier situación.

También en el razonamiento inductivo, la psicología cognitiva ha descubierto estrategias de pensamiento que difieren de la lógica matemática a la hora de abordar problemas en ambiente de incertidumbre. Así, los psicólogos Kahneman y Tversky (1982) han establecido el paradigma de heurísticos y sesgos para explicar la conducta humana en la resolución de problemas probabilísticos. Veamos la siguiente situación: Helena tiene 37 años y es una persona bastante enérgica. Estudió Ciencias Políticas y acabó entre los primeros de su promoción. Cuando era estudiante militó muy activamente en los movimientos sociales de la universidad, especialmente en la lucha antinuclear y contra la discriminación. ¿Qué te parece más probable: que Helena trabaje de cajera en un banco o que Helena trabaje de cajera en un banco y además sea una activa militante feminista?

Muchas personas responden que es más probable que Helena trabaje de cajera en un banco y además sea una activa militante feminista, siguiendo lo que Kahneman y Tversky llaman el heurístico de representatividad y que contradice el razonamiento probabilístico que dice que:

$$p(A \wedge B) \leq p(A)$$

Se han detectado estos heurísticos en otras situaciones aleatorias como, por ejemplo, las relacionadas con la probabilidad condicionada. Se presenta la siguiente tarea: En una ciudad el 85% de los taxis son verdes y el otro 15% son azules. Uno de estos coches es el causante de un accidente nocturno y se da a la fuga pero un testigo declara a la policía que el taxi es azul. Sometido el testigo a una prueba de identificación de colores de coches por la noche, se comprueba que el 80% de las veces acierta el color pero un 20% de las veces se equivoca. Estima la probabilidad de que el taxi del accidente sea azul.

La mayoría de las estimaciones se fijan fundamentalmente en el dato del 80% de fiabilidad del testigo, y no utilizan las probabilidades *a priori*. La pregunta es ¿una buena instrucción, a base de incorporar en las destrezas de decisión los esquemas de la probabilidad condicionada (teorema de Bayes), propicia las elecciones correctas, por lo menos en el sentido de hacer coincidir las concepciones *a priori* con las que se tienen *a posteriori*, aunque sea mediante simulación? Evidentemente el razonamiento probabilístico matemático contradice muchas veces el razonamiento intutivo espontáneo de las personas que tienen que tomar decisiones en ambiente de incertidumbre, de modo que la educación probabilista debe ir más allá del manejo de fórmulas y reglas de cálculo para profundizar en la complejidad del propio razonamiento probabilista.

Actividad 2.2

Realiza la siguiente tarea:

"Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Agitamos la urna y a ciegas extraemos dos bolas, una después de otra, sin reemplazamiento.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca, sabiendo que la primera es blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca, sabiendo que la segunda bola es blanca?"

Falk (1988) presenta esta tarea, aparentemente sencilla, que ilustra las dificultades que encuentran los estudiantes cuando no tienen una comprensión profunda del concepto de probabilidad condicionada. Falk propuso a estudiantes universitarios esta tarea; la gran mayoría resolvió bien el apartado *a)*, pero solo el 50% lo hizo en el *b).* ¿Dónde reside, a tu juicio, la dificultad?

Una tercera aportación muy relevante de la psicología es identificar la importancia de otros factores, más allá del cognitivo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Nos referimos a los factores metacognitivos, actitudinales, emocionales y sistema de creencias. En concreto:

– Se estudia el dominio afectivo en alumnos, profesores y futuros profesores, incluyendo variables como autoconcepto, atribuciones de causalidad, perseverancia en el empeño y ante la dificultad, regulación emocional (ansiedad, agrado) y motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas.
– Se investiga la importancia de los factores culturales sobre las creencias y las actitudes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
– Se estudia la relación entre la cognición de las personas y su sistema de creencias y sus emociones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
– Se investigan las concepciones implícitas de los (futuros) profesores sobre cómo se aprenden las matemáticas.
– Se estudia la relación entre las creencias de los maestros y su práctica docente.

– Se analiza la relación entre las creencias de los docentes sobre cómo enseñar matemáticas y las creencias de sus alumnos sobre cómo se aprenden las matemáticas.

En el apartado 10.2 se profundizará en el dominio afectivo como factor clave de la educación matemática.

Dentro de la comunidad de investigadores en DM, el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), constituido en el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), es uno de los grupos más activos y organiza congresos mundiales de gran impacto. A partir de una agenda de trabajo inicial de carácter psicológico, el grupo PME ha extendido su investigación a otras cuestiones, como son las relacionadas con la epistemología de las nociones matemáticas y con la dimensión social del aula de matemáticas donde aprende el estudiante.

Actividad 2.3

Visita la página del PME (<http://igpme.org>) e identifica los temas de investigación tratados en los últimos congresos. En concreto, analiza el tratamiento a las cuestiones de género y la gestión de la diversidad del alumnado en el aula de matemáticas.

En definitiva, el enfoque psicológico de la EM aporta ideas importantes al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como, por ejemplo, la existencia de diferentes tipos de conocimiento (conceptual, procedimental), el papel de los conocimientos previos de los alumnos, la importancia de la motivación hacia el aprendizaje, las técnicas para la resolución de problemas a partir de la propuesta de aprendizaje por descubrimiento, etc. A partir de los trabajos de psicólogos como Piaget, Vygotsky, Ausubel y Bruner, especialistas en DM como Bauersfeld, Alan Schoenfeld, Jeremy Kilpatrick, Richard Lesh y Martha Landau desarrollan sus investigaciones. Sin embargo, por otra parte, la crítica a este enfoque psicologicista es muy relevante y se centra en la subordinación de lo didáctico a lo psicológico, de manera que se impide la construcción de la didáctica de las matemáticas como una disciplina científica. Esta crítica está consistentemente realizada, entre otras líneas de investigación, por la escuela francesa de DM, que analizaremos en el apartado 2.6.

Más allá de la psicología, comienzan a proliferar los estudios de neurociencias relacionados con la educación. El aprendizaje para los neurocientíficos resulta de la integración de todas las informaciones tratadas y recibidas por nuestro cerebro, es pues un proceso cerebral que tiene un sustrato biológico. En este sentido, comprender el desarrollo cerebral podría tener importantes consecuencias sobre las prácticas escolares y, por tanto, es necesario que el profesorado posea un buen modelo mental de lo que pasa en el cerebro del aprendiz.

A título de ejemplo, se pueden citar algunas aportaciones de las neurociencias que pueden tener importantes repercusiones educativas: Los estudios realizados por John Geake, con niños especialmente dotados para las matemáticas, han revelado que el área parietal derecha y los lóbulos frontales de los dos hemisferios intervienen en la creatividad de la resolución de problemas matemáticos. Gracias a los estudios llevados a cabo por António Damásio sobre las conexiones entre la amígdala y la corteza prefrontal, la extendida creencia de que pensamiento y emoción se oponen se viene abajo: la cognición y la emoción actúan conjuntamente.

Destaca como muy importante el papel de las neuronas espejo en el aprendizaje: la cultura, en toda la extensión del término, consta de enormes conjuntos de habilidades y conocimientos complejos que se transmiten de una persona a otra por dos medios esenciales, el lenguaje y la imitación, a base de subrutinas en las que las neuronas espejo parecen jugar un papel fundamental. Sin nuestra capacidad para imitar a los demás y para ver el mundo desde la posición de otra persona no seríamos nada; los modelos mentales se van configurando a base de interpretar intenciones y pensamientos complejos de los otros. Puede que imitar haya sido el paso clave en la evolución de los homínidos y que de ahí nazca nuestra capacidad para transmitir conocimientos a base de ejemplos. Mediante la imitación, nuestra especie hizo de pronto la transición desde la evolución darwiniana de base genética, a través de la selección natural (que puede tardar millones de años) a la evolución cultural. Una habilidad compleja adquirida al principio por ensayo y error (o por casualidad, como cuando cierto antepasado homínido vio por primera vez arder un arbusto, debido a un rayo o a la erupción de un volcán) podía ser transmitida rápidamente a cada miembro de la tribu independientemente de su edad. Una función menos obvia de las neuronas espejo es la abstracción, la capacidad para evaluar semejanzas pese a las diferencias superficiales, que quizá haya allanado el terreno para las abstracciones más complejas propias de las matemáticas.

No cabe duda de que los estudios de neurociencias, centrales en el progreso científico actual, van a tener un fuerte impacto en los procesos de enseñanza-aprendizaje y, por ello, es necesario que los profesores estén muy atentos a sus hallazgos y aportaciones.

2.3. El enfoque de competencias y la educación matemática realista

La perspectiva educativa de las competencias tiene, en la actualidad, una gran importancia curricular y la mayoría de los sistemas educativos del mundo (por ejemplo, los países de la OCDE) establece la noción de competencia como la clave de arco de sus edificios formativos. Así, las últimas leyes educativas españolas, incluyendo la actual LOMCE, concretan sus intenciones educativas, sus grandes objetivos académicos, más en el desarrollo de competencias (saber hacer) que en la enciclopédica acumulación de conocimientos (saber decir).

Existen distintas definiciones de competencia y consideramos interesante subrayar algunos de los componentes esenciales a los que todas ellas hacen referencia. El primero es la movilización de los conocimientos, ser capaz de utilizar el conocimiento ante un problema. Una dimensión del aprendizaje fundamental, aunque no totalmente novedosa, ya que la funcionalidad del aprendizaje como indicador de su significatividad hace tiempo que está presente en las teorías constructivistas del conocimiento.

La integración de los distintos tipos de conocimientos que los estudiantes deberían aprender en la escuela es otro componente esencial del concepto de *competencia*. Se asume la distinta naturaleza psicológica del conocimiento humano (se aprenden de distinta manera los conocimientos conceptuales, las habilidades, los valores y las actitudes) y, por tanto, es preciso tener en cuenta esta especificidad a la hora de enseñar y evaluar. Sin embargo, usar el conocimiento para comprender la realidad y actuar sobre ella de acuerdo con las metas que uno se propone implica movilizar de forma articulada e interrelacionada los diferentes tipos de conocimiento.

En el concepto de *competencia* destaca un tercer aspecto: la importancia del contexto en el que se produce el aprendizaje y en el que hay que utilizarlo posteriormente. Frente a un enfoque de capacidades generales, se incide en la necesidad de enseñar a transferir lo aprendido en una situación concreta a otras muchas. La generalización del aprendizaje no se produciría a través de una abstracción desde un contexto a cualquier otro, sino desde el trabajo de una determinada capacidad en varios contextos, cuya planificación para ser llevado a cabo debería formar parte de la actividad escolar.

Finalmente, el objetivo de que las competencias constituyan la base para seguir aprendiendo a lo largo de la vida implicaría desarrollar capacidades metacognitivas que posibilitasen un aprendizaje autónomo. Un aprendiz competente es aquel que conoce y regula sus procesos de construcción del conocimiento, tanto desde el punto de vista cognitivo como emocional, y puede hacer un uso estratégico de sus conocimientos, ajustándolos a las circunstancias específicas del problema al que se enfrente.

Todos estos ingredientes del concepto de *competencia*, formulados por Coll (2004), son a nuestro juicio muy acertados, y los modelos curriculares, que ya hace tiempo optaron por el papel esencial de las capacidades en la selección y definición de las intenciones educativas, asumen (con mayor o menor énfasis) muchos de estos supuestos. Sin embargo, lo importante desde nuestra perspectiva, al margen de las aportaciones que acabamos de señalar, es analizar las limitaciones e incluso los riesgos que la asunción acrítica del concepto de *competencia* puede implicar para las reformas curriculares actuales.

En primer lugar, la identificación y definición de los aprendizajes esperados de los alumnos en términos de competencias no permite prescindir de los contenidos.

Es más, definir los aprendizajes básicos únicamente en términos de competencias puede ser engañoso, ya que su adquisición va siempre asociada a una serie de saberes (conocimientos, habilidades, valores, actitudes) que no por el hecho de estar implícitos dejan de estar implicados. También hay que hacer alusión al riesgo de homogeneización cultural que comporta la definición de los aprendizajes básicos en términos de competencias, ya que estas en ocasiones se desgajan de las prácticas socioculturales en las que inevitablemente se enmarcan.

Otro riesgo es el relativo a la falsa apariencia de facilidad en la selección y definición de los aprendizajes básicos, como consecuencia de la importancia atribuida a la actuación de los alumnos en este enfoque. Sin negar en absoluto el interés y las ventajas que comporta el énfasis en la movilización y aplicación de los contenidos, la idea ampliamente extendida de que es relativamente fácil identificar los aprendizajes básicos y llegar a consensos en torno a ellos, por el hecho de definirlos en términos más próximos a los comportamientos del alumnado, nos parece desacertada. La respuesta a qué enseñar y qué aprender en los términos más concretos posibles es esencial en el establecimiento de las intenciones educativas, pero antes de responder a esta pregunta es necesario plantearse otras, para qué aprender y para qué enseñar, que exige, entre otras cosas, una reflexión profunda acerca de la relevancia cultural de los aprendizajes y la función social de la educación escolar.

Además, las competencias no son directamente evaluables, por lo que hay que elegir los contenidos más adecuados para trabajarlas y desarrollarlas, definir la secuencia y el grado propio de los distintos niveles y cursos, establecer indicadores más precisos de evaluación (estándares, criterios de evaluación, niveles de logro, etc.) y acertar en las tareas que finalmente se le pide al alumno que realice. La dificultad de no perder el hilo competencial en este complejo recorrido es, sin duda, muy grande y nos lleva al debate de los estándares, con el que el enfoque de competencias se encuentra directamente imbricado y del que hablaremos en varios capítulos de este libro.

En definitiva, tal vez el riesgo principal de la competencia como concepto resida en que la novedad del constructo, asumido en ocasiones con excesivo entusiasmo por gobiernos, agencias y organismos internacionales (véase como ejemplo la OCDE y su Programa PISA), haya llevado a pensar que permitía resolver de un plumazo, o al menos soslayar sin demasiados problemas, una serie de cuestiones de gran complejidad. Lo cierto, sin embargo, es que estas cuestiones, especialmente las relacionadas con las decisiones sobre los aprendizajes básicos en la educación escolar, no desaparecen mágicamente si se deja de hablar de contenidos y se habla de competencias. En cambio, debido a la aparente y engañosa facilidad que ofrece para definir y concretar las intenciones educativas, el uso generalizado y a veces poco fundamentado del concepto de *competencia* puede contribuir a hacer más opacos los criterios que subyacen en estas decisiones y sustraerlos al análisis y el debate público presentándolos como los únicos posibles y deseables, cuando de hecho son siempre la consecuencia de unas opciones determinadas.