Análisis de datos en ciencias sociales y de la salud

Ejercicios del volumen I
Soluciones

Capítulo 1

1.1. Las soluciones marcadas con un asterisco se refieren a variables de las que ya hemos señalado que no pueden ser consideradas estrictamente ordinales. Ya hemos argumentado que estas variables pueden tratarse, a efectos prácticos, como si estuvieran medidas con una escala de intervalos:

a. Ordinal*.
b. Nominal.
c. Ordinal*.
d. Razón.
e. Razón.
f. Ordinal*.
g. Ordinal*.
h. Ordinal.
i. Ordinal*.
j. Ordinal.
k. Razón.
l. Ordinal*.
m. Ordinal*.
n. Razón.
ñ. Razón.
o. Nominal.
p. Razón.
q. Ordinal*.
r. Razón.
s. Ordinal.
t. Razón.
u. Nominal.
v. Ordinal*.
w. Razón.
x. Nominal.
y. Ordinal*.
z. Nominal.

1.2. *a*. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones del estudio (palabras sin dibujos, palabras con dibujos) y asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

b. Nivel descriptivo. El estudio se limita a observar (constatar) cómo es algo.

c. Nivel relacional. Es posible determinar si se produce una mejora, pero no si esa mejora se debe al entrenamiento (no hay forma de saber, por ejemplo, si la posible mejora es debida simplemente al paso del tiempo).

d. Nivel relacional. No hay asignación aleatoria a las condiciones del estudio (hombres, mujeres). Es posible averiguar si los hombres y las mujeres difieren en su actitud pero no el motivo de esa diferencia.

e. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones del estudio (dosis de alcohol) y asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

f. Nivel relacional. No hay asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones del estudio. Es posible saber si los grupos formados difieren, pero no si las diferencias se deben a los años de relación o a otra cosa.

g. Nivel relacional. No hay asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones del estudio (nivel de ansiedad). Es posible saber si los grupos formados difieren, pero no si esas diferencias se deben al nivel de ansiedad o a alguna otra variable.

h. Nivel relacional. Es posible saber si el número o porcentaje de recuperaciones es distinto en los hombres y en las mujeres, pero no el verdadero motivo de la diferencia.

i. Nivel relacional. Es posible averiguar si la calidad percibida mejora con el tiempo, pero no es posible asegurar que la mejora sea debida al paso del tiempo.

j. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones del estudio (nivel de alcohol en sangre) y asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

k. Nivel relacional. Es posible averiguar si la opinión de los pacientes cambia con la evolución de la terapia, pero no es posible asegurar que la evolución de la terapia sea la responsable de ese cambio.

l. Nivel descriptivo. El estudio se limita a observar el número o porcentaje de parados con problemas de depresión.

m. Nivel relacional. Es posible determinar si se produce un cambio pero no es posible asegurar que el cambio se deba al tratamiento (podría deberse al paso del tiempo, podría existir un efecto placebo, etc.).

n. Nivel descriptivo. Puesto que sólo se ha registrado el número de aciertos de cada pregunta, lo único que puede saberse es si existen diferencias en la proporción de aciertos..

ñ. Nivel relacional. No hay asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones del estudio (diferencia de años). Es posible saber si los grupos formados difieren, pero no el motivo de la diferencia.

o. Nivel explicativo. Hay control sobre las condiciones del estudio (los dos contextos que rodean a la pregunta) y ambas se aplican a los mismos sujetos.

p. Nivel relacional. Es posible determinar si se produce un cambio pero no es posible asegurar que el cambio se deba al tratamiento (podría deberse al paso del tiempo, podría existir un efecto placebo, etc.).

q. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones del estudio (tipo de entrenamiento) y asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

r. Nivel relacional. Es posible determinar si el razonamiento abstracto cambia, pero no es posible asegurar que ese cambio se deba al paso del tiempo.

s. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones del estudio (intensidad del ruido) y asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

t. Nivel relacional. Es posible establecer si el recuerdo cambia con el paso del tiempo, pero no es posible asegurar que el cambio observado se deba al paso del tiempo.

u. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones (tipo de terapia) y asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

v. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones (intensidad luminosa) y las cuatro condiciones se aplican a las mismas tiendas.

w. Nivel explicativo. Hay control de las condiciones del estudio (cantidad de recompensa) y asignación aleatoria de los ratones a las condiciones.

x. Nivel relacional. No hay control de las condiciones del estudio (la experiencia del profesor viene dada) ni asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones.

y. Nivel relacional. Es posible determinar si se produce un cambio pero no es posible asegurar que el cambio se deba a la intervención (podría deberse al paso del tiempo, podría existir un efecto placebo, etc.).

z. Nivel relacional. No hay asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones del estudio. Es posible determinar el grado de parecido o diferencia existente entre los cocientes intelectuales de los gemelos, pero no aislar la causa del parecido o la diferencia.

Capítulo 2

2.1. En estas soluciones se indica no sólo si una variable es categórica o cuantitativa. En las variables categóricas se indica si son nominales u ordinales. En las cuantitativas se distingue entre las que son típicamente cuantitativas (de intervalos o de razón; aclarando si son continuas o discretas) y las que, no siendo típicamente cuantitativas, tampoco son estrictamente ordinales.

a. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
b. Categórica (nominal).
c. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
d. Cuantitativa (continua).
e. Cuantitativa (continua).
f. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
g. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
h. Categórica (ordinal).
i. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
j. Categórica (ordinal).
k. Cuantitativa (discreta).
l. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
m. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
n. Cuantitativa (continua).
ñ. Cuantitativa (discreta).
o. Categórica (nominal).
p. Cuantitativa (discreta).
q. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
r. Cuantitativa (continua).
s. Categórica (ordinal).
t. Cuantitativa (discreta).
u. Categórica (nominal).
v. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
w. Cuantitativa (discreta).
x. Categórica (nominal).
y. Cuantitativa (no estrictamente ordinal).
z. Categórica (nominal).

2.2. La alternativa *a* es falsa: un parámetro es una característica de la población, no de cada uno de sus elementos. La alternativa *b* es falsa: un estadístico es una variable (su valor depende de la muestra concreta en la se calcula). La alternativa *c* es falsa: el valor de un estadístico varía de muestra a muestra (por eso decimos que es una variable). La alternativa *d* es verdadera: los estudiantes de la Universidad Autónoma constituyen una población cuando las conclusiones del estudio se refieren sólo a ellos. La alternativa *e* es falsa: sólo sería representativa de los estudiantes de ese colegio, que son los únicos que han tenido la posibilidad de ser elegidos.

2.3. Las tres alternativas son falsas. La muestra no es aleatoria porque los pacientes se van seleccionando conforme van llegando a la consulta; esto podría confundirse con una muestra aleatoria (argumentando que los pacientes llegan a la consulta aleatoriamente), pero no lo es porque no todos los pacientes con insomnio han tenido la posibilidad de ser elegidos; sólo los que han tenido la posibilidad de acudir a consulta durante el periodo de reclutamiento (esto descarta las alternativas *a* y *c*). La muestra, por tanto, no es aleatoria y no ha sido seleccionada de la población de pacientes con insomnio, sino de la población de potenciales pacientes del hospital elegido (esto descarta la alternativa *b*).

2.4. *a*. La de potenciales pacientes de la zona de influencia de los hospitales seleccionados.
b. El grado de relación entre tabaquismo y enfisema pulmonar.
c. No. Es una muestra aleatoria de los pacientes que acuden a consulta.
d. Relacional. No existe asignación aleatoria a las condiciones del estudio y, por tanto, no hay forma de excluir el posible efecto de terceras variables.

2.5. *a*. Verdadera (ver ecuación [2.5]).
b. Falsa. Esto sólo será así si los sucesos son exclusivos.
c. Falsa. Esto sólo será así si los sucesos son independientes.
d. Falso. El resultado de cada lanzamiento es independiente del resultado de cualquier otro lanzamiento.
e. Falso. El resultado "5 caras" puede ocurrir de 252 maneras. El resultado "7 caras" puede ocurrir de 120 maneras (combinaciones sin repetición; ver Apéndice 2).

2.6. Puesto que las preguntas tienen cinco alternativas con sólo una correcta, la probabilidad de acertar una pregunta por azar vale: $P(A) = 1/5 = 0{,}20$; y la de no acertar: $P(nA) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$. Por tanto:
a. $0{,}80 \times 0{,}80 \times 0{,}80 = 0{,}512$.
b. Hay tres formas distintas de obtener un acierto: se puede acertar la primera pregunta, la segunda o la tercera. Por tanto, $0{,}20 \times 0{,}80 \times 0{,}80 + 0{,}80 \times 0{,}20 \times 0{,}80 + 0{,}80 \times 0{,}80 \times 0{,}20 = 0{,}384$.
c. Hay tres formas distintas de obtener dos aciertos: se puede fallar la primera pregunta, o la segunda, o la tercera. Por tanto, $0{,}80 \times 0{,}20 \times 0{,}20 + 0{,}20 \times 0{,}80 \times 0{,}20 + 0{,}20 \times 0{,}20 \times 0{,}80 = 0{,}096$.
d. $0{,}20 \times 0{,}20 \times 0{,}20 = 0{,}008$.

2.7. *a*. $0{,}50^{10} = 0{,}00098$.
b. Hay 10 formas distintas de obtener un acierto: se puede acertar el primer par, el segundo, el tercero, ..., o el décimo. Por tanto, $10 \times 0{,}50^{10} = 0{,}0098$.

2.8. *a*. Sí son independientes: $P(H \cap S) = P(H)P(S) = 500/5.000 = (2.000/5.000)(1.250/5.000) = 0{,}10$.
b. $P(M \cap N) = 2.250 / 5.000 = 0{,}45$.
c. $P(S \mid H) = P(S \cap H) / P(H) = 0{,}10 / (2.000/5.000) = 0{,}25$.

2.9. Sabemos que $P(H) = 0{,}40$; $P(M) = 0{,}60$; $P(D \mid H) = 0{,}10$ y $P(D \mid M) = 0{,}20$. Por tanto:
a. $P(H \cap D) = P(H)\, P(D \mid H) = 0{,}40 \times 0{,}10 = 0{,}04$.
b. $P(M \cap D) = P(M)\, P(D \mid M) = 0{,}60 \times 0{,}20 = 0{,}12$.
c. $P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = 0{,}04 + 0{,}12 = 0{,}16$.
d. $P(H \mid D) = P(H \cap D) / P(D) = 0{,}04 / 0{,}16 = 0{,}25$.

2.10. *a*. La enfermedad será detectada tanto si la detectan ambas pruebas como si la detecta sólo una de ellas: $P(A = \text{sí})\, P(B = \text{sí}) + P(A = \text{sí})\, P(B = \text{no}) + P(A = \text{no})\, P(B = \text{sí}) = 0{,}90 \times 0{,}80 + 0{,}90 \times 0{,}20 + 0{,}10 \times 0{,}80 = 0{,}98$.
b. $P(B = \text{no})\, P(C = \text{no}) = 0{,}20 \times 0{,}30 = 0{,}06$.
c. $P(A = \text{sí})\, P(B = \text{sí})\, P(C = \text{sí}) = 0{,}90 \times 0{,}80 \times 0{,}70 = 0{,}504$.
d. Que al menos dos de las tres pruebas detecten la enfermedad significa que la detecten las tres o que la detecten sólo dos. Es decir,

$P(A=\text{sí})\,P(B=\text{sí})\,P(C=\text{sí}) + P(A=\text{sí})\,P(B=\text{sí})\,P(C=\text{no}) + P(A=\text{sí})\,P(B=\text{no})\,P(C=\text{sí}) +$
$+ P(A=\text{no})\,P(B=\text{sí})\,P(C=\text{sí}) =$
$= (0{,}90\times 0{,}80\times 0{,}70) + (0{,}90\times 0{,}80\times 0{,}30) + (0{,}90\times 0{,}20\times 0{,}70) + (0{,}10\times 0{,}80\times 0{,}70) = 0{,}902.$

2.11. Conocemos: $P(P_1) = P(P_2) = 0{,}50$; $P(A\,|\,P_1) = 1/4 = 0{,}25$; $P(A\,|\,P_2) = 1/5 = 0{,}20$. A partir de aquí se puede calcular la probabilidad de obtener un acierto: $P(A) = 0{,}50{\times}0{,}25 + 0{,}50{\times}0{,}20 = 0{,}225$. Por tanto:

a. $P(P_1\,|\,A) = P(P_1 \cap A)/P(A) = (0{,}50 \times 0{,}25)/0{,}225 = 0{,}56$.

b. $P(P_2\,|\,A) = P(P_2 \cap A)/P(A) = (0{,}50 \times 0{,}20)/0{,}225 = 0{,}44$.

2.12. *a*. El diagnóstico será correcto si el detector identifica correctamente tanto a una persona que miente ($M \cap m$) como a una persona que no miente ($nM \cap nm$):

- $P(M \cap m) = P(M)\,P(m\,|\,M) = 0{,}20 \times 0{,}90 = 0{,}18$.
- $P(nM \cap nm) = P(nM)\,P(nm\,|\,nM) = 0{,}80 \times 0{,}95 = 0{,}76$.

Por tanto, la probabilidad de diagnóstico correcto vale $0{,}18 + 0{,}76 = 0{,}94$.

b. Puesto que el detector indica que la persona miente (m), el diagnóstico sólo será correcto si la persona realmente está mintiendo (M). Hay que calcular: $P(M|m)$. Comencemos con lo que sabemos:

- Probabilidad de que un sujeto mienta: $P(M) = 0{,}20$.
- Probabilidad de que un sujeto no mienta: $P(nM) = 0{,}80$.
- $P(M \cap m) = 0{,}18$ (calculada en el apartado *a*).
- $P(nM \cap m) = 0{,}04$ (calculada en el apartado *a*).
- $P(m) = 0{,}18 + 0{,}04 = 0{,}22$.

Por tanto, $P(M\,|\,m) = P(M \cap m)/P(m) = 0{,}18/0{,}22 = 0{,}82$.

2.13. *a*. La prueba puede dar un resultado positivo (+) tanto si la enfermedad está presente (E) como si no (nE). Comencemos con lo que sabemos:

- Probabilidad de que la persona esté enferma: $P(E) = 0{,}30$.
- Probabilidad de la persona no esté enferma: $P(nE) = 0{,}70$.
- $P(E \cap +) = P(E)\,P(+\,|\,E) = 0{,}30 \times 0{,}90 = 0{,}27$.
- $P(nE \cap +) = P(nE)\,P(+\,|\,nE) = 0{,}70 \times 0{,}20 = 0{,}14$.

Por tanto, la probabilidad de obtener un resultado positivo vale $P(+) = 0{,}27 + 0{,}14 = 0{,}41$.

b. El diagnóstico será equivocado tanto si la prueba dice que una persona que está enferma (E) no lo está (−), como si dice que una persona que no está enferma (nE) lo está (+):

- $P(E \cap -) = P(E)\,P(-\,|\,E) = 0{,}30 \times 0{,}10 = 0{,}03$.
- $P(nE \cap +) = P(nE)\,P(+\,|\,nE) = 0{,}70 \times 0{,}20 = 0{,}14$.

Por tanto, la probabilidad de que el diagnóstico esté equivocado vale $0{,}03 + 0{,}14 = 0{,}17$.

c. $P(nE\,|+) = P(nE \cap +)/P(+) = 0{,}14/0{,}41 = 0{,}34$.

2.14. Hay que calcular: $P(S\,|\,C)$. Comencemos con lo que sabemos:

- Probabilidad de superar la prueba: $P(S) = 0{,}40$.
- Probabilidad de no superar la prueba: $P(nS) = 0{,}60$.
- $P(S \cap C) = 0{,}40 \times 0{,}80 = 0{,}32$.
- $P(nS \cap C) = 0{,}60 \times 0{,}05 = 0{,}03$.
- $P(C) = 0{,}32 + 0{,}03 = 0{,}35$.

Por tanto, $P(S\,|\,C) = P(S \cap C\,)/P(C) = 0{,}32/0{,}35 = 0{,}91$.

2.15. *a*. Aproximadamente la mitad de los entrevistados que defraudan a Hacienda habrá obtenido cara en el primer lanzamiento de la moneda y habrá respondido "sí". La otra mitad habrá vuelto a tirar la moneda y la mitad de ellos habrá obtenido cruz y habrá respondido "sí". Por tanto, cabe esperar que P valga la mitad de π más la cuarta parte de π. Es decir: $P = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = 0{,}75\pi$. En consecuencia, utilizando esta estrategia podrá estimarse π mediante $P / 0{,}75$.

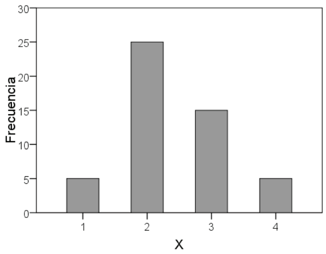
b. $P / 0{,}75 = 0{,}15 / 0{,}75 = 0{,}20$.

c. Lo primero que se está asumiendo es que los entrevistados responden con sinceridad cuando están seguros de que sus respuestas son completamente anónimas; este supuesto es razonable, pero no hay forma de constatar que efectivamente las cosas son así. También se está asumiendo que la proporción de caras y cruces que obtienen los entrevistados está igualada por el azar.

Capítulo 3

3.1. $a = na_i$ (frecuencia absoluta acumulada).
$b = P_i$ (frecuencia relativa).
$c = n_i$ (frecuencia absoluta).
$d = \%a_i$ (frecuencia porcentual acumulada).
$e = Pa_i$ (frecuencia relativa acumulada).
$f = \%_i$ (frecuencia porcentual).

3.2. *a*. Diagrama de barras:



b. $X = 2$ (categoría con mayor frecuencia no acumulada).

c. $$ICV = \frac{\sum n_i n_{i'}}{I(I-1)\,(n/I)^2/2} = \frac{5(25)+5(15)+5(5)+25(15)+25(5)+15(5)}{4(4-1)(50/4)^2/2} = \frac{800}{937{,}5} = 0{,}85.$$

3.3.

Actitud	n_i	P_i	$\%_i$	na_i	Pa_i	$\%a_i$
Muy en contra	20	0,10	10	20	0,10	10
En contra	50	0,25	25	70	0,35	35
Indiferente	30	0,15	15	100	0,50	50
A favor	80	0,40	40	180	0,90	90
Muy a favor	20	0,10	10	200	1,00	100

3.4. 1ª tabla: $n = na_4 = 60$; $na_1 = 10$; $na_2 = 10+15 = 25$; $n_4 = 60-59 = 1$; $n_3 = 59-25 = 34$.
2ª tabla: $Pa_4 = 1{,}00$; $P_1 = 0{,}15$; $P_2 = 0{,}35-0{,}15 = 0{,}20$; $P_3 = 0{,}85-0{,}35 = 0{,}50$.

3ª tabla: $Pa_2 = 0{,}20 + 0{,}30 = 0{,}50$; $Pa_4 = 1{,}00$; $P_1 = 0{,}20$; $P_3 = 0{,}50 - 0{,}50 = 0$; $P_4 = 1 - 0{,}50 = 0{,}50$;
$n_1 = 0{,}20(100) = 20$; $n_2 = 0{,}30(100) = 30$; $n_3 = 0(100) = 0$; $n_4 = 0{,}50(100) = 50$.

En la 1ª tabla hay una categoría cuya frecuencia es muy pequeña ($n_4 = 1$).

En la 3ª tabla hay una categoría cuya frecuencia vale cero (n_3).

3.5. $n = 80$; $P_1 = 8/80 = 0{,}10$; $\%_1 = 0{,}10(100) = 10$; $na_1 = 8$; $Pa_1 = 0{,}10$; $\%a_1 = 10$;
$n_2 = 80(0{,}15) = 12$; $\%_2 = 0{,}15(100) = 15$; $na_2 = 8 + 12 = 20$; $Pa_2 = 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25$; $\%a_2 = 10 + 15 = 25$;
$P_3 = 0{,}60 - 0{,}25 = 0{,}35$; $n_3 = 0{,}35(80) = 28$; $\%_3 = 0{,}35(100) = 35$; $na_3 = 20 + 28 = 48$; $\%a_3 = 25 + 35 = 60$;
$P_4 = 25/100 = 0{,}25$; $n_4 = 0{,}25(80) = 20$; $na_4 = 48 + 20 = 68$; $Pa_4 = 0{,}60 + 0{,}25 = 0{,}85$; $\%a_4 = 60 + 25 = 85$;
$n_5 = 80 - 68 = 12$; $P_5 = 12/80 = 0{,}15$; $\%_5 = 0{,}15(100) = 15$; $na_5 = 68 + 12 = 80$; $Pa_5 = 1{,}00$; $\%a_5 = 100$.

3.6. *a*. La variable n_1 puede tomar valores entre 0 y 10 (es decir, 0 aciertos, 1 acierto, 2 aciertos, ..., 10 aciertos). Y dado que se trata de la suma de 10 ensayos independientes de una variable dicotómica (1 = «acierto», 0 = «error»), es decir, de la suma de 10 ensayos de Bernoulli independientes entre sí, su distribución es la binomial, por lo que puede utilizarse la tabla B del Apéndice final para conocer la probabilidad asociada a cada valor de n_1. La siguiente tabla ofrece esas probabilidades acumuladas (F) e individuales (f):

n_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(n_1)$	0,001	0,011	0,055	0,172	0,377	0,623	0,828	0,945	0,989	0,999	1,000
$f(n_1)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

b. Ecuación [3.7]: $E(n_1) = n\pi_1 = 10(0{,}50) = 5$.
Ecuación [3.9]: $V(n_1) = n\pi_1(1-\pi_1) = 10(0{,}50)(0{,}50) = 2{,}5$.

c. De acuerdo con los datos de la distribución de n_1 obtenida en el apartado *a*:
$P(n_1 > 7) = 1 - F(7) = 1 - 0{,}945 = 0{,}055$.

d. $100\,P(n_1 > 7) = 100\,(0{,}055) = 11$ sujetos.

3.7. Vamos a calcular la probabilidad de obtener con el tratamiento convencional el resultado obtenido con el experimental. Si esa probabilidad es muy baja, significará que el resultado obtenido con el tratamiento experimental es muy difícil de obtener con el convencional.

Tenemos $n = 20$ ensayos de una variable dicotómica (1 = «recuperación», 0 = «no recuperación») con probabilidad de recuperación $\pi_1 = 0{,}40$ en cada ensayo. Tenemos, por tanto, una variable que se distribuye binomialmente. Consultando la tabla de la distribución binomial (Tabla B del Apéndice final) obtenemos: $P(n_1 > 13) = 1 - F(13) = 1 - 0{,}994 = 0{,}006$. Por tanto, es muy poco probable (0,006) que con el tratamiento convencional pueda obtenerse el resultado del tratamiento experimental.

3.8. *a*. El diagnóstico será incorrecto tanto si la prueba dice que una persona que está enferma (E) no lo está (−), como si dice que una persona que no está enferma (nE) lo está (+):

- $P(E \cap -) = P(E)\,P(-\,|\,E) = 0{,}30 \times 0{,}10 = 0{,}03$.
- $P(nE \cap +) = P(nE)\,P(+\,|\,nE) = 0{,}70 \times 0{,}20 = 0{,}14$.

Por tanto, la probabilidad de diagnóstico equivocado será: $0{,}03 + 0{,}14 = 0{,}17$.

b. Tenemos $n = 30$ ensayos de una variable dicotómica (1 = «diagnóstico incorrecto», 0 = «diagnóstico correcto») con probabilidad de diagnóstico incorrecto $\pi_1 = 0{,}17$ en cada ensayo. Lo que cabe esperar que ocurra es el valor esperado de la variable n_1 = «número de diagnósticos incorrectos».

Es decir, $E(n_1) = n\pi_1 = 30(0{,}17) = 5{,}1$ (ecuación [3.7]). Por tanto, en 30 diagnósticos, lo más probable es que la prueba se equivoque en 5.

c. La probabilidad de que no haya más de 2 diagnósticos incorrectos es la probabilidad de que haya dos, uno o ninguno; es decir:

$P(n_1 < 3) = P(n_1 = 0) + P(n_1 = 1) + P(n_1 = 2)$

Aplicando la ecuación [3.4] con $n = 30$ y $\pi_1 = 0{,}17$ se obtiene:

- $P(n_1 = 0) = [30! / (0!\ 30!)]\ 0{,}17^0\ (0{,}83)^{30} = 1(0{,}003735) = 0{,}003735$.
- $P(n_1 = 1) = [30! / (1!\ 29!)]\ 0{,}17^1\ (0{,}83)^{29} = 30\,(0{,}000765) = 0{,}022953$.
- $P(n_1 = 2) = [30! / (2!\ 28!)]\ 0{,}17^2\ (0{,}83)^{28} = 435\,(0{,}000157) = 0{,}068167$.

Por tanto: $P(n_1 < 3) = 0{,}003735 + 0{,}022953 + 0{,}068167 = 0{,}095$.

3.9. Tenemos una variable dicotómica (1 = «acierto», 0 = «error») de la que se realizan $n = 20$ ensayos. La probabilidad de acierto en cada ensayo vale $\pi_1 = 1/5 = 0{,}20$. En la tabla de la distribución binomial (Tabla B del Apéndice final) puede comprobarse:

$P(n_1 = 7) = 1 - 0{,}913 = 0{,}087$.
$P(n_1 = 8) = 1 - 0{,}968 = 0{,}032$.

La probabilidad de obtener 7 o más aciertos es mayor que 0,05 (por tanto, 7 aciertos no sirve como punto de corte). Sin embargo, la probabilidad de obtener 8 o más aciertos es menor que 0,05. La decisión será, por tanto, aprobar a los estudiantes que obtengan 8 aciertos o más.

3.10. La suma de las puntuaciones del test no es más que el número de aciertos (n_1). Y la varianza del número de aciertos (ver ecuación [3.9]) viene dada por $V(n_1) = n\,\pi_1\,(1 - \pi_1)$, es decir, $k\,\pi_1\,(1 - \pi_1)$. Ahora bien, el producto entre dos números que suman 1 es máximo cuando esos números son iguales. Por tanto la varianza de n_1 será máxima cuando $\pi_1 = 1 - \pi_1 = 0{,}50$. Luego la alternativa *d* es correcta: el valor máximo de la varianza del test (n_1) es $k\,(0{,}25)$. La varianza del test sólo valdrá cero cuando todas las respuestas sean aciertos o todas sean fallos; y no sabemos cuáles son las respuestas (esto descarta la alternativa *a*). Y las alternativas *b* y *c* se refieren a valores concretos que no están justificados, pues no se dispone de ninguna información para saber cuál es el valor concreto de la varianza.

3.11. Tenemos una variable dicotómica (1 = «en contra», 0 = «a favor») de la que se han realizado $n = 20$ ensayos. Siendo n_1 = «número de personas que se manifiestan en contra de la eutanasia» y π_1 = «proporción de personas en contra de la eutanasia», las probabilidades asociadas a la variable n_1 pueden obtenerse en la tabla de la distribución binomial (Tabla B del Apéndice final):

$P(n_1 > 10) = 1 - F(10) = 1 - 0{,}872 = 0{,}128$.

Capítulo 4

4.1. *a*. $\bar{Y} = (2 + 7 + 10 + 11 + \cdots + 18 + 19 + 19 + 20)/20 = 300/20 = 15$.

b. El 5% de 20 casos es $0{,}05\,(20) = 1$. Por tanto, la media recortada al 5% es la media aritmética tras eliminar dos casos (un caso de la parte inferior de la distribución y otro caso de la parte superior). Es decir,

$\bar{Y}_{5\%} = (7 + 10 + 11 + \cdots + 18 + 19 + 19)/18 = 278/18 = 15{,}44$.

c. Puesto que $i = (n+1)/2 = (20+1)/2 = 10{,}5$ la mediana hay que calcularla tomando como referencia las posiciones 10ª y 11ª, es decir, las puntuaciones 16 y 17:

$Mdn_Y = (1-0{,}5)16 + (0{,}5)17 = 16{,}5$.

d. Para poder calcular la trimedia necesitamos los tres cuartiles. Pero el segundo cuartil ya lo hemos calculado en el apartado anterior: $Q_2 = Mdn_Y = 16{,}5$.

- $Q_1 = P_{25}$: $i = k(n+1)/100 = 25(20+1)/100 = 5{,}25$. Hay que trabajar con las posiciones 5ª y 6ª, es decir, con las puntuaciones 13 y 14: $P_{25} = (1-0{,}25)13 + (0{,}25)14 = 13{,}25$.
- $Q_3 = P_{75}$: $i = k(n+1)/100 = 75(20+1)/100 = 15{,}75$. Hay que trabajar con las posiciones 15ª y 16ª, es decir, con las puntuaciones 18 y 18. Y como ambas puntuaciones son iguales: $P_{25} = 18$.

Por tanto, $\overline{Q} = (Q_1 + 2Q_2 + Q_3)/4 = (13{,}25 + 2(16{,}5) + 18)/4 = 16{,}06$.

e. Los estadísticos calculados ofrecen valores comprendidos entre 15 y 16,5. El más resistente (la mediana) vale 16,5. El menos resistente (la media) vale 15. Por tanto, el centro de la variable se encuentra en torno a 16 puntos. El hecho de que la media sea menor que la mediana permite anticipar que la distribución es asimétrica negativa. Enseguida veremos cuál es el grado de asimetría.

4.2. *a*. $A_T = 20 - 2 = 18$.

b. $A_{IQ} = 18 - 13{,}25 = 4{,}75$ (los cuartiles 1º y 3º se han calculado en el ejercicio anterior).

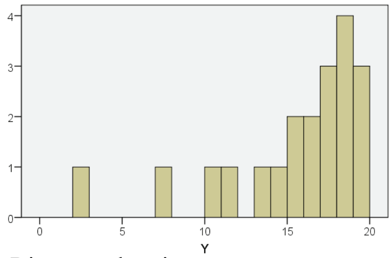
c. $S_Y^2 = [(2-15)^2 + (7-15)^2 + (10-15)^2 + \cdots + (19-15)^2 + (19-15)^2 + (20-15)^2]/19 = 20{,}316$.

$S_Y = (20{,}316)^{1/2} = 4{,}51$.

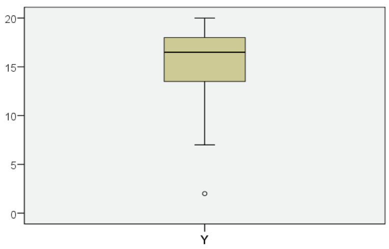
d. $CV_{\text{media}} = 100(4{,}51/15) = 30{,}07$.

e. La amplitud total no supera 4 veces a la intercuartil; esto significa que no existe mucha dispersión (éste es el criterio en el que se basan, por ejemplo, los bigotes de los diagramas de caja). Además, el coeficiente de variación es aproximadamente un tercio de la media, lo cual indica, de nuevo, que se trata de un conjunto de puntuaciones no muy dispersas.

4.3. *a*. Histograma (sin agrupar datos en categorías):



b. Diagrama de caja:



c. $M_3 = (2-15)^3+(7-15)^3+(10-15)^3+\cdots+(19-15)^3+(19-15)^3+(20-15)^3 = -2.520.$
$g_1 = [nM_3]/[(n-1)(n-2)S_Y^3] = 20(-2.520)/[19(18)(4{,}51)^3] = -1{,}61.$

d. $M_2 = (2-15)^2+(7-15)^2+(10-15)^2+\cdots+(19-15)^2+(19-15)^2+(20-15)^2 = 386.$
$M_4 = (2-15)^4+(7-15)^4+(10-15)^4+\cdots+(19-15)^4+(19-15)^4+(20-15)^4 = 35.066.$
$g_2 = [n(n+1)M_4 - 3(n-1)M_2^2]/[(n-1)(n-2)(n-3)S_Y^4] =$
$= [20(21)(35.066) - 3(19)(386)^2]/[19(18)(17)(4{,}51)^4] = 2{,}59.$

e. $S_{g_1} = \sqrt{[6n(n-1)]/[(n+1)(n-2)(n+3)]} = \sqrt{[6(20)(19)/[21(18)(17)]} = 0{,}51.$
$S_{g_2} = \sqrt{[4(n^2-1)S_{g_1}^2]/[(n-3)(n+5)]} = \sqrt{[4(20^2-1)(0{,}51^2)]/[17(25)]} = 0{,}99.$

f. $Z_{g_1} = g_1/S_{g_1} = -1{,}61/0{,}51 = -3{,}16.$
$Z_{g_2} = g_2/S_{g_2} = 2{,}59/0{,}99 = 2{,}62.$

g. Tanto el histograma como el diagrama de caja muestran una distribución asimétrica negativa. Y el cociente entre el índice de asimetría y su error típico (que es menor que -2) confirma la presencia de asimetría. Los casos que se alejan del centro por la izquierda hacen que en esa zona haya más casos (leptocurtosis) de los que habría en una distribución mesocúrtica.

Resumiendo: las 20 puntuaciones obtenidas en la prueba de selección tienen las siguientes características: un centro situado en torno a 16, sin excesiva dispersión y con evidente asimetría negativa.

4.4. *a.* $\bar{Y}_{\text{antes}} = (9+8+21+14+3+17+14+33+22+19)/10 = 160/10 = 16.$
$\bar{Y}_{\text{después}} = (10+2+11+6+3+10+3+15+8+12)/10 = 80/10 = 8.$

b. $S^2_{Y_{\text{antes}}} = [(9-16)^2+(8-16)^2+\cdots+(22-16)^2+(19-16)^2]/9 = 650/9 = 72{,}222.$
$S_{Y_{\text{antes}}} = (72{,}222)^{1/2} = 8{,}50.$

$S^2_{Y_{\text{después}}} = [(10-8)^2+(2-8)^2+(11-8)^2+\cdots+(8-8)^2+(12-8)^2]/9 = 172/9 = 19{,}111.$
$S_{Y_{\text{después}}} = (19{,}111)^{1/2} = 4{,}37.$

c. Y_{antes}: 3, 8, 9, 14, 14, 17, 19, 21, 22, 33 (puntuaciones ordenadas).

- $Q_1 = P_{25}$: $i = k(n+1)/100 = 25(10+1)/100 = 2{,}75$. Hay que trabajar con las posiciones 2ª y 3ª, es decir, con las puntuaciones 8 y 9: $P_{25} = (1-0{,}75)8 + (0{,}75)9 = 8{,}75$.
- $Q_2 = P_{50}$: $i = k(n+1)/100 = 50(10+1)/100 = 5{,}50$. Hay que trabajar con las posiciones 5ª y 6ª, es decir, con las puntuaciones 14 y 17: $P_{50} = (1-0{,}50)14 + (0{,}50)17 = 15{,}50$.
- $Q_3 = P_{75}$: $i = k(n+1)/100 = 75(10+1)/100 = 8{,}25$. Hay que trabajar con las posiciones 8ª y 9ª, es decir, con las puntuaciones 21 y 22: $P_{75} = (1-0{,}25)21 + (0{,}25)22 = 21{,}25$.

4.5. *a.* $\sum_i (Y_i - \bar{Y}) = \sum_i Y_i - \sum_i \bar{Y} = n\bar{Y} - n\bar{Y} = 0.$
$\sum_i (Y_i - \bar{Y}) = (9-16) + (8-16) + (21-16) + \cdots + (22-16) + (19-16) = 0.$

b. $X = a+bY;\quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i (a+bY_i) = \frac{1}{n}na + \frac{1}{n}b\sum_i Y_i = a+b\bar{Y}.$
$\bar{X} = a+b\bar{Y} = 5 + 10(16) = 165.$

c. $X = Y_{\text{antes}} - Y_{\text{después}}$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i (Y_{\text{antes}} - Y_{\text{después}}) = \frac{1}{n}\sum_i Y_{\text{antes}} - \frac{1}{n}\sum_i Y_{\text{después}} = \bar{Y}_{\text{antes}} - \bar{Y}_{\text{después}}$.

$\bar{X} = \bar{Y}_{\text{antes}} - \bar{Y}_{\text{después}} = 16 - 8 = 8$.

d. $X = bY_{\text{después}}$, $\bar{X} = 24$.

$\bar{X} = b\bar{Y}_{\text{después}} = b(8) = 24 \rightarrow b = 24/8 = 3$.

e. $X = a + Y_{\text{después}}$, $\bar{X} = 24$.

$\bar{X} = a + \bar{Y}_{\text{después}} = a + 8 = 13 \rightarrow a = 13 - 8 = 5$.

4.6. *a*. Los puntos de corte deben colocarse en las calificaciones que correspondan al percentil 25, al percentil $25 + 40 = 65$ y al percentil $65 + 25 = 90$:

P_{25}: $i = k(n+1)/100 = 25(30+1)/100 = 7{,}75$. Hay que trabajar con las posiciones 7ª y 8ª, es decir, con las puntuaciones 4,5 y 4,7: $P_{25} = (1 - 0{,}75)\,4{,}5 + (0{,}75)4{,}7 = 4{,}65$.

P_{65}: $i = k(n+1)/100 = 65(30+1)/100 = 20{,}15$. Hay que trabajar con las posiciones 20ª y 21ª, es decir, con las puntuaciones 6,4 y 7,0: $P_{65} = (1 - 0{,}15)6{,}4 + (0{,}15)7{,}0 = 6{,}49$.

P_{90}: $i = k(n+1)/100 = 90(30+1)/100 = 27{,}90$. Hay que trabajar con las posiciones 27ª y 28ª, es decir, con las puntuaciones 8,2 y 8,6: $P_{90} = (1 - 0{,}90)\,8{,}2 + (0{,}90)\,8{,}6 = 8{,}56$.

b. Necesitamos conocer los percentiles 25 y 75. El percentil 25 vale 4,65 (lo hemos calculado en el apartado anterior). P_{75}: $i = k(n+1)/100 = 75(30+1)/100 = 23{,}25$. Hay que trabajar con las posiciones 23ª y 24ª, es decir, con las puntuaciones 7,6 y 7,8: $P_{75} = (1 - 0{,}25)7{,}6 + (0{,}25)7{,}8 = 7{,}65$. Por tanto, el 50% de los casos centrales se encuentra entre las calificaciones 4,65 y 7,65.

4.7. *a*. Media ponderada:

$$\bar{Y}_{\text{total}} = \frac{n_A\bar{Y}_A + n_B\bar{Y}_B + n_C\bar{Y}_C}{n_A + n_B + n_C} = \frac{22(98) + 30(103) + 28(100)}{22 + 30 + 28} = \frac{8.046}{80} = 100{,}575.$$

b. $$102 = \frac{8.046 + 105n_D}{80 + n_D} \rightarrow n_D = \frac{102(80) - 8.046}{105 - 102} = 38.$$

4.8. *a*. Más de la mitad de los casos (el 60%) obtiene puntuaciones mayores que la media. Por tanto, la media difiere de la mediana. Y esto implica que la distribución es asimétrica.

b. Por encima de la media quedan más casos (60%) que por encima de la mediana (50%). Por tanto la media es menor que la mediana. Esto es lo que ocurre en una distribución asimétrica negativa, donde los valores que se alejan por la parte baja de la distribución hacen que la media se desplace hacia esa zona.

4.9. $Y_1 + Y_2 = 2(10) = 20 \rightarrow Y_1 + 3Y_1 = 20 \rightarrow Y_1 = 20/4 = 5$.

$Y_2 = 3Y_1 = 3(5) = 15$.

4.10. La desviación típica no se altera si a las puntuaciones originales se les suma una constante, pero queda multiplicada por la constante multiplicada. Por tanto, la desviación típica de las puntuaciones originales vale $150/10 = 15$.

4.11. No. El valor de la varianza no sólo depende del grado de dispersión de una variable, sino de su métrica. Por tanto, si no se conoce la métrica de las variables no es posible afirmar cuál de ellas es más dispersa. Si la altura se mide en metros y las puntuaciones obtenidas tienen una varianza de 0,20, esas mismas puntuaciones expresadas en centímetros tendrán una varianza de $100^2(0{,}20) = 2.000$.

4.12. La distribución es asimétrica porque los percentiles 25 y 75 no se encuentran a la misma distancia de la mediana. Y la asimetría es positiva porque el percentil 75 se encuentra más alejado de la mediana (5 puntos) que el percentil 25 (3 puntos).

4.13. $CV_{\text{media}} = 100\,S_Y/\bar{Y} \quad \rightarrow \quad 100\sqrt{22}/\bar{Y} = \sqrt{22}/\bar{Y} \quad \rightarrow \quad \bar{Y} = 100\sqrt{22}/93{,}81 = 5.$

$\sum_i \bar{Y} = n\bar{Y} = 6(5) = 30 \quad \rightarrow \quad Y_5 = 30 - 0 - 1 - 3 - 5 - 12 = 9.$

P_{25}: $i = k(n+1)/100 = 25(6+1)/100 = 1{,}75$. Hay que trabajar con las posiciones 1ª y 2ª, es decir, con las puntuaciones 0 y 1: $P_{25} = (1 - 0{,}75)0 + (0{,}75)1 = 0{,}75$.

4.14. Esto sólo ocurrirá si el CI del escocés que emigra a Inglaterra es menor que el CI medio escocés y mayor que el CI medio inglés. Y esto sólo será posible si el CI medio escocés es mayor que el CI medio inglés. Por tanto, sí es posible. Pero obviamente se trata de una broma escocesa en la que se da por hecho que el CI medio de los ingleses es menor que el de los escoceses y que si un escocés decide emigrar a Inglaterra es porque su CI está por debajo del CI medio escocés.

4.15. $\sum_i (Y_i - c)^2 \quad (\text{con } c \neq \bar{Y})$.

Hagamos: $c = \bar{Y} + a$.

$$\sum_i (Y_i - c)^2 = \sum_i [Y_i - (\bar{Y} + a)]^2 = \sum_i [(Y_i - \bar{Y}) + a]^2 =$$

$$= \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 + na^2 + 2a\sum_i (Y_i - \bar{Y}) = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 + na^2.$$

Es decir, la suma de las nuevas desviaciones cuadráticas es igual a la suma de las desviaciones cuadráticas de la media más el tamaño de la muestra multiplicado por el cuadrado de a (y a no es otra cosa que la diferencia entre la media y c). En el ejemplo:

$$\sum_i (Y_i - c)^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 + na^2 \quad \rightarrow \quad \sum_i (Y_i - c)^2 = 130 + 20(5) = 230.$$

Capítulo 5

5.1. *a*. $Z_{(13)} = (13-15)/4{,}51 = -0{,}44$ (la media y la desviación típica se han calculado ya en los ejercicios 4.1.*a* y 4.2.*c* del capítulo anterior).

b. No. Eso sólo ocurrirá si la distribución es normal. Podemos comprobarlo calculando el percentil 33: $i = k(n+1)/100 = 33(20+1)/100 = 6{,}93$. Hay que trabajar con las posiciones 6ª y 7ª, es decir, con las puntuaciones 14 y 15: $P_{33} = (1-0{,}93)\,14 + (0{,}93)\,15 = 14{,}93$ (distinta de 13).

c. Simplemente multiplicarlas por 5.

d. Llamando X a las puntuaciones transformadas: $X = 5 + 2\,Z_Y$.

e. No. Las puntuaciones típicas no se alteran cuando se efectúan transformaciones lineales. Por tanto, $Z_X = Z_Y$.

f. No. Como resultado de esa transformación se obtienen puntuaciones negativas y con decimales. Las puntuaciones negativas no se entienden bien como puntuaciones de una escala a no ser que el cero se tome como referente del centro de la distribución. Y los decimales pueden dar la falsa impresión de que se está midiendo con un elevado nivel de precisión (cosa que en realidad no se está haciendo).

5.2. *a*. Si se suman las puntuaciones directas no se consigue el objetivo porque de ese modo tendría más peso la prueba con mayor media (y si las varianzas fueran muy distintas, no habría manera de saber lo que significa esa puntuación final). Antes de sumar las dos puntuaciones hay que tipificarlas. Llamando Y_F a las puntuaciones finales, Y_1 a las puntuaciones de la primera prueba e Y_2 a las de la segunda, la forma de obtener puntuaciones finales en las que ambas pruebas tengan el mismo peso es la siguiente: $Y_F = Z_{Y_1} + Z_{Y_2}$.

b. $Y_F = \frac{2}{3} Z_{Y_1} + \frac{1}{3} Z_{Y_2}$.

c. Primer candidato: $Z_{(14)} = (14-15)/4{,}51 = -0{,}22$; $Z_{(9)} = (9-8)/3{,}24 = 0{,}31$.
$Y_{\text{final}} = -0{,}22 + 0{,}31 = 0{,}09$.
Segundo candidato: $Z_{(17)} = (17-15)/4{,}51 = 0{,}44$; $Z_{(6)} = (6-8)/3{,}24 = -0{,}62$.
$Y_{\text{final}} = 0{,}44 - 0{,}62 = -0{,}18$.
Por tanto, si ambas pruebas puntúan igual (tienen el mismo peso), el primer sujeto tiene una puntuación final más alta (0,09) que el segundo (−0,18).

d. Primer candidato: $Y_{\text{final}} = (2/3)(-0{,}22) + (1/3)(0{,}31) = -0{,}44$.
Segundo candidato: $Y_{\text{final}} = (2/3)(0{,}44) + (1/3)(-0{,}62) = -0{,}44$.
Por tanto, si la primera prueba puntúa el doble que la segunda (es decir, tiene el doble de peso que la segunda en la puntuación final), el segundo sujeto tiene una puntuación final más alta (0,09) que el primero (−0,04).

e. Llamando Y_F a las puntuaciones finales calculadas en los apartados *a* o *b* y X a las puntuaciones transformadas: $X = 100 + 20\,Z_{Y_F}$.

5.3. Sujeto 1: a partir de su puntuación directa $Y = 11$ se obtienen las demás.
Sujeto 2: si $y = 0$, entonces $Y = y + \bar{Y} = 0 + 15 = 15$.
Sujeto 3: si $Z_Y = 0{,}5$, entonces $y = 4(0{,}5) = 2$; $Y = y + \bar{Y} = 2 + 15 = 17$.
Sujeto 4: si $X = 45$, entonces $Z_Y = (45-50)/10 = -0{,}5$; $y = 4(-0{,}5) = -2$; $Y = y + \bar{Y} = -2 + 15 = 13$.
Sujeto 5: su puntuación diferencial vale 4 (pues la suma de las puntuaciones diferenciales vale cero). A partir de ahí se puede proceder como en el sujeto 2: si $y = 4$, entonces $Y = y + \bar{Y} = 4 + 15 = 19$.

Sujetos	Y	y	Z_Y	X
1	11	−4,0	−1,0	40
2	15	0	0	50
3	17	2	0,5	55
4	13	−2,0	−0,5	45
5	19	4	1	60

5.4. *a*. No necesariamente. El valor de una puntuación típica depende de la media y de la desviación típica de la variable. De hecho, el décimo sujeto, que puntúa más alto en el momento *antes* ($Y_{\text{antes}} = 19$) que en el momento *después* ($Y_{\text{después}} = 12$), tiene una puntuación típica más baja en el momento *antes* ($Z_{(\text{antes} = 19)} = (19 - 16)/8{,}5 = 0{,}35$) que en el momento *después* ($Z_{(\text{antes} = 12)} = (12 - 8)/4{,}37 = 0{,}92$). Y lo mismo ocurre con los sujetos 3, 5 y 6 (ver, más abajo, la tabla incluida en el apartado *e*).

b. Sí. En una misma variable, cuanto mayor es una puntuación típica, mayor es también el porcentaje de sujetos que acumula.

c. No necesariamente. Los percentiles se basan únicamente en el orden (mayor, menor) de las puntuaciones. Las puntuaciones típicas tienen en cuenta, no sólo el orden, sino la distancia entre las puntuaciones.

d. Sí. En una misma variable (D_Y), las puntuaciones directas y las puntuaciones típicas expresan cosas equivalentes: cuanto mayor es una puntuación directa, mayor es también su puntuación típica (esto puede comprobarse más abajo, en la tabla incluida en el siguiente apartado).

e. No. La correspondencia que se da entre las puntuaciones típicas de dos variables distintas no es equivalente a la que se da entre sus correspondientes puntuaciones directas. Esto es debido a que cada variable tiene su propia media y su propia desviación típica (ver la respuesta del apartado *a* de este mismo ejercicio). En la siguiente tabla puede apreciarse que no existe correspondencia entre las variables D_Y y D_Z.

Sujetos	Y_{antes}	$Y_{\text{después}}$	D_Y	Z_{D_Y}	Z_{antes}	$Z_{\text{después}}$	D_Z
1	9	10	−1	−1,56	−0,82	0,46	−1,28
2	8	2	6	−0,35	−0,94	−1,37	0,43
3	21	11	10	0,35	0,59	0,69	−0,10
4	14	6	8	0,00	−0,24	−0,46	0,22
5	3	3	0	−1,39	−1,53	−1,14	−0,39
6	17	10	7	−0,17	0,12	0,46	−0,34
7	14	3	11	0,52	−0,24	−1,14	0,91
8	33	15	18	1,73	2,00	1,60	0,40
9	22	8	14	1,04	0,71	0,00	0,71
10	19	12	7	−0,17	0,35	0,91	−0,56

f. No. Una vez tipificadas las puntuaciones directas, las medias valen cero y la diferencia entre ellas también. Y eso no refleja el cambio experimentado entre ambos momentos.

5.5. *a*. 0,1977; 0,7088; 0,8925 − 0,3409 = 0,5516; 0,2389 + 0,1788 = 0,4177.

b. 0; −0,62; 1,11; 0,28 y 1,26.

5.6.

a. 0,5000.	*j*. 0,8944.	*r*. 0,3830.
b. 0,3085.	*k*. 0,1915.	*s*. 0,6571.
c. 0,0344.	*l*. 0,4842.	*t*. 0,6571.
d. 0,6915.	*m*. 0,2927.	*u*. 0,9108.
e. 0,9656.	*n*. 0,0954.	*v*. 0,5344.
f. 0,5000.	*ñ*. 0,1915.	*w*. 0,1400.
g. 0,3085.	*o*. 0,4452.	*x*. 0,8085.
h. 0,1056.	*p*. 0,2537.	*y*. 0,8447.
i. 0,6915.	*q*. 0,0390.	*z*. 1,0000.

5.7.

a. −3,00.	*f*. −1,28.	*k*. 1,64.
b. −2,56.	*g*. −0,67.	*l*. 1,96.
c. −2,33.	*h*. 0,00.	*m*. 2,33.
d. −1,96.	*i*. 0,67.	*n*. 2,56.
e. −1,64.	*j*. 1,28.	*ñ*. 3,00.

5.8. No. Aunque la media de esas 5 puntuaciones vale 0, la desviación típica no vale 1, sino 1,58.

5.9. *a*. $Z_{(130)} = (130 - 100)/15 = 2$.

b. $P(\text{CI} > 130) = P(Z > 2) = 0{,}0228$. El 2,28% de los casos.

c. En puntuaciones típicas, entre $Z_{0,025} = -1{,}96$ y $Z_{0,975} = 1{,}96$.

$-1{,}96 = (\text{CI}_1 - 100)/15 \rightarrow \text{CI}_1 = 100 - 1{,}96\,(15) = 70{,}06$.

$1{,}96 = (\text{CI}_2 - 100)/15 \rightarrow \text{CI}_2 = 100 + 1{,}96\,(15) = 129{,}4$.

En puntuaciones directas (CI), entre 70,6 y 129,4.

d. Llamando X a la puntuación transformada: $X = 5 + 1{,}5\,(2) = 8$.

e. Los puntos de corte deben ser los percentiles 5, 25, 75 y 95, los cuales, tratándose de una distribución normal, son, en puntuaciones típicas: $Z_{0,05} = -1{,}65$, $Z_{0,25} = -0{,}67$, $Z_{0,75} = 0{,}67$, $Z_{0,95} = 1{,}65$. Y, en puntuaciones directas (CI):

Percentil 5: $-1{,}65 = (P_5 - 100)/15 \rightarrow P_5 = -1{,}65\,(15) + 100 = 75{,}25$.
Percentil 25: $-0{,}67 = (P_{25} - 100)/15 \rightarrow P_{25} = -0{,}67\,(15) + 100 = 89{,}95$.
Percentil 75: $0{,}67 = (P_{75} - 100)/15 \rightarrow P_{75} = 0{,}67\,(15) + 100 = 110{,}05$.
Percentil 95: $1{,}65 = (P_{95} - 100)/15 \rightarrow P_{95} = 1{,}65\,(15) + 100 = 124{,}75$.

5.10. *a*. Dos horas es justamente el tiempo medio de la distribución. Y en una distribución normal, la media deja por debajo de sí (a la izquierda) el 50% de las puntuaciones.

b. $P(Y < 100) = P[Z < (100 - 120)/20] = P(Z < -1) = 0{,}1587$. Aproximadamente el 16% de los estudiantes (el 15,87%).

c. Hay que calcular el percentil 85. Sabemos (tabla de la curva normal) que $Z_{0,85} = 1{,}04$. Por tanto, $1{,}04 = (Y - 120)/20 \rightarrow Y = 120 + 1{,}04\,(20) = 140{,}8$ minutos.

5.11. $P(Z < -2) + P(Z > 2) = 2F(Z = -2) = 2\,(0{,}0228) = 0{,}0456$. En porcentaje: 4,56%.

5.12. $Z_{0,063} = -1{,}53$; $Z_{0,992} = 2{,}41$.

$-1{,}53 = (147 - \bar{Y})/S_Y \rightarrow \bar{Y} = 1{,}53\,S_Y + 147$.

$2{,}41 = (541 - \bar{Y}) / S_Y \quad \rightarrow \quad 2{,}41 = [541 - (1{,}53\, S_Y + 147)]/S_Y.$

$2{,}41\, S_Y + 1{,}53\, S_Y = 541 - 147 \quad \rightarrow \quad 3{,}94\, S_Y = 394.$

$S_Y = 394/3{,}94 = 100.$

$\bar{Y} = 1{,}53\,(100) + 147 = 300.$

5.13. *a*. $P(P_{25} < Y_1 < P_{75}) \times P(P_{25} < Y_2 < P_{75}) = P(-0{,}67 < Z < 0{,}67)^2 = (0{,}50)^2 = 0{,}25.$

b. $P(Z > 0) \times P(Z > 0) = (0{,}50)^2 = 0{,}25.$

c. $P(Z > 2) \times P(Z > 2) = F(Z = -2)^2 = 0{,}0228^2 = 0{,}00052.$

5.14. Si la distancia entre $Z = -1$ y $Z = 1$ vale 20 puntos, la distancia entre $Z = 0$ y $Z = 1$ vale 10 puntos. Por tanto, la desviación típica vale 10 puntos (debe tenerse en cuenta que una puntuación típica no es más que el número de desviaciones típicas que una puntuación directa se aleja de su media). Por otro lado, si el percentil 90 ($Z_{0,90} = 1{,}28$) vale 40, entonces

$1{,}28 = (40 - \bar{Y})/10 \quad \rightarrow \quad \bar{Y} = 40 - 10\,(1{,}28) = 27{,}2.$

5.15. Tenemos una variable dicotómica (1 = «en contra», 0 = «a favor») de la que se han realizado $n = 50$ ensayos. Siendo n_1 = «número de personas que se manifiestan en contra de la eutanasia» y π_1 = «proporción de personas en contra de la eutanasia», la variable n_1 sigue el modelo de probabilidad binomial. Como $n > 20$ (límite de la tabla de la distribución binomial), podemos utilizar la aproximación de la binomial a la normal:

$P(n_1 > 25) = P[Z > (26 - 50 \times 0{,}40)/\sqrt{50(0{,}40)(0{,}60)}\,] = P(Z > 1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = 0{,}042.$

5.16. Vamos a calcular la probabilidad de obtener con el tratamiento convencional el resultado obtenido con el experimental. Si esa probabilidad es muy baja, significará que el resultado obtenido con el tratamiento experimental es muy difícil de obtener con el convencional.

Tenemos $n = 40$ ensayos de una variable dicotómica (1 = «recuperación», 0 = «no recuperación») con probabilidad de recuperación $\pi_1 = 0{,}40$ en cada ensayo. Tenemos, por tanto, una variable (n_1 = «número de recuperaciones») que se distribuye binomialmente. Pero, como $n > 20$, vamos a recurrir a la aproximación de la distribución binomial a la normal:

$P(n_1 > 24) = P[Z > (25 - 40 \times 0{,}40)/\sqrt{40(0{,}40)(0{,}60)}\,] = P(Z > 1{,}90) = 1 - 0{,}9981 = 0{,}0019.$

Es muy poco probable (0,0019) que el resultado obtenido con el tratamiento experimental pueda obtenerse con el convencional. Por tanto, parece que el método experimental funciona mejor que el convencional.

5.17. *a*. Se han realizado $n = 30$ ensayos de una variable dicotómica (1 = «acierto», 0 = «error»). La variable n_1 es la suma de 30 ensayos de Bernoulli independientes entre sí; por tanto, su distribución de probabilidad es la binomial, con

$E(n_1) = n\,\pi_1 = 30\,(0{,}50) = 15$ (ecuación [3.7]).

$V(n_1) = n\,\pi_1\,(1 - \pi_1) = 30\,(0{,}50)(0{,}50) = 7{,}5$ (ecuación [3.7]).

b. Puesto que el tamaño muestral es mayor que 20 (límite de la Tabla B), recurrimos a la aproximación de la distribución binomial a la normal:

$P(n_1 > 20) = P[Z > (21 - 15)/\sqrt{7{,}5}\,] = P(Z > 2{,}19) = 1 - 0{,}9857 = 0{,}0143.$

5.18. Tenemos una variable dicotómica (1 = «acierto», 0 = «error») de la que se han realizado $n = 30$ ensayos, con n_1 = «número de aciertos». Se trata de calcular el valor del percentil 95 cuando los sujetos responden al azar, es decir, cuando la probabilidad de acierto en cada ensayo vale $\pi_1 = 1/5 = 0{,}20$:

$Z_{0,95} = 1{,}645 = (n_1 - 30 \times 0{,}20)/\sqrt{30(0{,}20)(1-0{,}20)} = (n_1 - 6)/2{,}19$.

$n_1 = 6 + 1{,}645(2{,}19) = 9{,}6$.

El criterio establecido lleva a colocar el punto de corte para el aprobado en 9,6 aciertos. Es decir, será necesario acertar al menos 10 preguntas para aprobar.

Capítulo 6

6.1. *a*. $\mu_Y = E(Y) = \sum Y_i f(Y_i) = (0+2+4+6+8)/5 = 4$.

$\sigma_Y^2 = V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 24 - 4^2 = 8$.

$E(Y^2) = \sum Y_i^2 f(Y_i) = (0^2+2^2+4^2+6^2+8^2)/5 = 120/5 = 24$.

b. Número de muestras con reposición: $N^n = 5^2 = 25$.

c.

Muestras	$\bar{Y}$	$f(\bar{Y})$
(0,0)	0	1/25
(0,2) (2,0)	1	2/25
(0,4) (2,2) (4,0)	2	3/25
(0,6) (2,4) (4,2) (6,0)	3	4/25
(0,8) (2,6) (4,4) (6,2) (8,0)	4	5/25
(2,8) (4,6) (6,4) (8,2)	5	4/25
(2,4) (4,2) (6,6)	6	3/25
(6,8) (8,6)	7	2/25
(8,8)	8	1/25

6.2. *a*. $\mu_{\bar{Y}} = E(\bar{Y}) = \sum \bar{Y}_i f(\bar{Y}_i) = 0(1/25) + 1(2/25) + \cdots + 8(1/25) = 4$.

$\sigma_{\bar{Y}}^2 = V(\bar{Y}) = E(\bar{Y}^2) - [E(\bar{Y})]^2 = 20 - 4^2 = 4$.

$E(\bar{Y}^2) = \sum \bar{Y}_i^2 f(\bar{Y}_i) = 0^2(1/25) + 1^2(2/25) + \cdots + 8^2(1/25) = 20$.

b. $\mu_Y = \mu_{\bar{Y}} = 4$; $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \sigma_Y^2/n = 8/2 = 4$.

6.3. *a*. Distribución muestral del número o proporción de aciertos (= respuestas *V*).

n_V	*Muestras*	$f(n_V)$
0	FFF	1/8
1	VFF, FVF, FFV	3/8
2	VVF, VFV, FVV	3/8
3	VVV	1/8

b. $E(n_V) = \sum n_V f(n_V) = 0(1/8) + 1(3/8) + 2(3/8) + 3(1/8) = 1{,}5.$

$V(n_V) = E(n_V^2) - [E(n_V)]^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75.$

$E(n_V^2) = \sum n_V^2 f(n_V) = 0^2(1/8) + 1^2(3/8) + 2^2(3/8) + 3^2(1/8) = 24/8 = 3.$

6.4. *a*. Los posibles valores de n_F van de 0 (nadie a favor) a 8 (todos a favor). Utilizando la distribución binomial con $n = 8$ y $\pi_F = 0{,}40$ se obtienen los resultados que se ofrecen a continuación (si se utiliza la Tabla B del Apéndice final, debe tenerse en cuenta que las probabilidades de la tabla están acumuladas):

n_F	$f(n_F)$
0	0,017
1	0,089
2	0,209
3	0,279
4	0,232
5	0,124
6	0,041
7	0,010
8	0,000

b. $E(n_F) = n\pi_F = 8(0{,}40) = 3.2.$

$V(n_F) = n\pi_F(1 - \pi_F) = 8(0{,}40)(1 - 0{,}40) = 1.92.$

6.5. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 8$, $\sigma_Y = 3$ y $n = 9$.

$P(7 \leq \bar{Y} \leq 10) = P(Z_{(7)} \leq Z \leq Z_{(10)}) = F(Z_{(10)} - F(Z_{(7)}).$

$$Z_{(\bar{Y})} = \frac{\bar{Y} - \mu_{\bar{Y}}}{\sigma_Y/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad Z_{(7)} = \frac{7 - 8}{3/\sqrt{9}} = -1 \quad \rightarrow \quad Z_{(10)} = \frac{10 - 8}{3/\sqrt{9}} = 2.$$

Por tanto, $P(7 \leq \bar{Y} \leq 10) = P(-1 \leq Z \leq 2) = F(2) - F(-1) = 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185.$

6.6. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 5$ y $\sigma_Y = 3$.

a. Con $n = 25$: $P(\bar{Y} \leq 4{,}4) = P(Z \leq \frac{4{,}4 - 5}{3/\sqrt{25}}) = P(Z \leq -1) = 0{,}1587.$

Con $n = 25$, a la media 4,4 le corresponde el percentil 15,87, el cual se encuentra por debajo del percentil 20 establecido como criterio para pedir apoyo. Por tanto, el profesor del grupo decidirá pedir la colaboración de un experto en educación especial.

b. Con $n = 16$: $P(\bar{Y} \leq 4{,}4) = P(Z \leq \frac{4{,}4 - 5}{3/\sqrt{16}}) = P(Z \leq -0{,}8) = 0{,}2119.$

Con $n = 16$, a la media 4,4 le corresponde el percentil 21,19, el cual se encuentra por encima del percentil 20. En consecuencia, el profesor del grupo decidirá no pedir la colaboración del experto.

6.7. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 40$, σ_Y desconocida y $n = 25$.
Como desconocemos σ, utilizamos la distribución t con $n - 1 = 24$ grados de libertad.

$$P(\bar{Y} \geq 43) = P(T \geq T_{(43)}) = 1 - F(T_{(43)}).$$

$$T_{(\bar{Y})} = \frac{\bar{Y} - \mu_{\bar{Y}}}{S_Y/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad T_{(7)} = \frac{43 - 40}{17{,}5/\sqrt{25}} = 0{,}857.$$

$$P(\bar{Y} \geq 43) = P(T \geq 0{,}857) = 1 - F(0{,}857) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20.$$

6.8. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 12$, σ_Y desconocida y $n = 45$.
Como desconocemos σ_Y, utilizamos la distribución t con $n - 1 = 44$ grados de libertad.

$$P(\bar{Y} \geq 14) = P(T \geq T_{(14)}) = 1 - F(T_{(14)})$$

$$T_{(14)} = (14 - 12)/\sqrt{27/45} = 2{,}582.$$

$$P(\bar{Y} \geq 14) = P(T \geq 2{,}582) < 0{,}01.$$

La tabla de la distribución t no incluye la probabilidad exacta asociada al valor 2,582, pero sabemos que es menor que 0,01.

6.9. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 50$, $\sigma_Y = 9$ y $n = 36$.
Buscamos la media concreta que corresponde al percentil 25 en la distribución muestral de la media con $\mu_{\bar{Y}} = 50$ y $\sigma_{\bar{Y}} = 9/6$. Sabemos que en la distribución normal estandarizada $N(0, 1)$, el percentil 25 vale $-0{,}67$, pues $P(Z \leq -0{,}67) = 0{,}2514 = 0{,}25$. Por tanto,

$$-0{,}67 = \frac{\bar{Y} - 50}{9/\sqrt{36}} \quad \rightarrow \quad \bar{Y} = -0{,}67\,\frac{9}{\sqrt{36}} + 50 = 48{,}995.$$

Es decir, al percentil 25 le corresponde una media de 48,995. En consecuencia, ése es el promedio que debe obtener el grupo, como mínimo, para que el educador decida aplicar el programa.

6.10 *a*. La distribución normal es simétrica. Y sabemos que la puntuación 20 deja por debajo de sí un área idéntica a la que deja la puntuación 50 por encima. Esto significa que las puntuaciones 20 y 50 se encuentran a la misma distancia de la media. Por tanto, $\mu_Y = (20 + 50)/2 = 35$. Para calcular la varianza, sabemos que $Z_{(50)} = Z_{0,75} = 0{,}67$. Por tanto,

$$0{,}67 = \frac{50 - 35}{\sigma_Y} \quad \rightarrow \quad \sigma_Y = \frac{50 - 35}{0{,}67} = 22{,}39 \quad \rightarrow \quad \sigma_Y^2 = 22{,}39^2 = 501{,}31.$$

b. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 35$, $\sigma_Y = 22{,}39$ y $n = 25$.

$$P(\bar{Y} \geq 40) = P(Z \geq \frac{40 - 35}{22{,}39/\sqrt{25}}) = P(Z \geq 1{,}12) = 1 - 0{,}8686 = 0{,}1314.$$

6.11. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 1$, $\sigma_Y = 3$ y $n = 9$.
Sabemos que $Z_{\bar{Y}} = Z_{0,75} = 0{,}67$. Por tanto,

$$0{,}67 = \frac{\bar{Y} - 1}{3/\sqrt{9}} \quad \rightarrow \quad \bar{Y} = 0{,}67(3/\sqrt{9}) + 1 = 0{,}67(1) + 1 = 1{,}67.$$

6.12. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 40$ y $\sigma_Y = 10$.
Sabemos que $Z_{(42)} = Z_{0,99} = 2{,}326$. Por tanto,

$$2{,}326 = \frac{42 - 40}{10/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{2{,}326\,(10)}{42 - 40} \quad \rightarrow \quad n = \left[\frac{2{,}326\,(10)}{42 - 40}\right]^2 = 135.$$

6.13. Distribución muestral de la media con $\mu_Y = 10$ y $\sigma_Y = 2$.

a. Sí . El valor $\bar{Y} = 10$ es igual a la media de la población y, por tanto, igual a la media de la distribución muestral de la media. En consecuencia, su tipificación valdrá cero independientemente del tamaño muestral. Y a iguales puntuaciones típicas, igual probabilidad asociada.

b. No. El valor $\bar{Y} = 20$ es mayor que la media de la población. Por tanto, su distancia a la media, una vez tipificado, será tanto menor cuanto mayor sea el tamaño muestral (el cual está dividiendo al tipificar). En consecuencia, $P(\bar{Y}_1 > 20) < P(\bar{Y}_2 > 20)$.

6.14. Distribución normal con $\mu_Y = 30$ y $\sigma_Y = 10$. Y distribución muestral de la media con $n = 25$. A la media le corresponde una puntuación $Z = 0$. Y a cada aumento o disminución de 10 puntos en Y (valor de la desviación típica) le corresponde un aumento o disminución de un punto en Z. Con esta información se pueden obtener las puntuaciones Z. También sabemos que la distribución normal es simétrica. Y esto permite obtener las probabilidades acumuladas $F(Z)$. Por último, el error típico de la distribución muestral vale $10/5 = 2$, lo cual significa que cada distancia de 10 puntos en Y se corresponde con una distancia de 2 puntos en $\bar{Y}$. Esto permite calcular los valores de $\bar{Y}$.

Y	0	10	20	30	40	50	60
Z	−3	−2	−1	0	1	2	3
$F(Z)$	0,001	0,023	0,16	0,5	0,84	0,977	0,999
$\bar{Y}$	24	26	28	30	32	34	36

6.15. Distribución muestral de la media.

Muestras	$\bar{Y}$	$f(\bar{Y})$
(0,0)	0,5	1/4
(0,1) (1,0)	0,5	2/4
(1,1)	1,0	1/4

Por tanto, la probabilidad de que la media valga 1 es 1/4 = 0,25.

6.16. Distribución muestral del número o proporción de aciertos, con $n = 50$ y $\pi_A = 0{,}50$ (A = acierto). Como el tamaño muestral es grande (> 20), utilizamos la aproximación de la binomial a la normal:

$$E(n_A) = n\pi_A = 50(0{,}50) = 25.$$

$$V(n_A) = n\pi_A(1-\pi_A) = 50(0{,}50)(1-0{,}50) = 12{,}5.$$

$$P(n_A > 30) = P(Z \geq \frac{31-25}{\sqrt{12{,}5}}) = P(Z \geq 1{,}70) = 1 - 0{,}9554 = 0{,}0446.$$

6.17. Población dicotómica (1, 0) y distribución muestral del número o proporción de aciertos, con $n = 20$ y $\pi_F = 0{,}65$ (F = «actitud favorable»).

a. $E(X) = \sum X_i f(X_i) = 0(0{,}35) + 1(0{,}65) = 0{,}65.$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0{,}65 - 0{,}65^2 = 0{,}2275.$

$E(X^2) = \sum X_i^2 f(X_i) = 0^2(0{,}35) + 1^2(0{,}65) = 0{,}65.$

b. $E(n_F) = n\pi_F = 20(0{,}65) = 13.$

$V(n_F) = n\pi_F(1-\pi_F) = 20(0{,}65)(1-0{,}65) = 4{,}55.$

c. $P(n_F > 15) = P(Z \geq \dfrac{16-13}{\sqrt{4{,}55}}) = P(Z \geq 1{,}41) = 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793.$

6.18. Distribución muestral del número de recuperaciones, con $n = 20$ y $\pi_R = 0{,}30$ (R = «recuperación»).

$E(n_R) = n\pi_R = 20(0{,}30) = 6.$

$V(n_R) = n\pi_R(1-\pi_R) = 20(0{,}30)(1-0{,}30) = 4{,}2.$

$P(n_R > 8) = P(Z \geq \dfrac{9-6}{\sqrt{4{,}2}}) = P(Z \geq 1{,}46) = 1 - 0{,}9279 = 0{,}0721.$

6.19. Distribución muestral del número de aciertos, con $n = 10$ y $\pi_A = 0{,}25$ (A = «acierto»).

$E(n_A) = n\pi_A = 10(0{,}25) = 2{,}5.$

$V(n_A) = n\pi_A(1-\pi_A) = 10(0{,}25)(1-0{,}25) = 1{,}875.$

$P(n_A > 4) = P(Z \geq \dfrac{5-2{,}5}{\sqrt{1{,}875}}) = P(Z \geq 1{,}83) = 1 - 0{,}9664 = 0{,}0336.$

Ésta es la probabilidad de que un sujeto acierte al menos 5 preguntas. Si responden al azar 100 sujetos cabe esperar que $100(0{,}0336) = 3{,}36$ (al menos 3 sujetos) acierten al menos 5 preguntas.

6.20. Distribución muestral de la media con μ_Y y σ_Y desconocidas, $n = 49$ y $\sigma_{\bar{Y}} = 3$.

$$Z_{(\bar{Y})} = \frac{\bar{Y} - \mu_{\bar{Y}}}{\sigma_Y/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{76 - \mu_Y}{3} \quad \rightarrow \quad \mu_Y = 76 - 2(3) = 70.$$

$$\sigma_{\bar{Y}} = \sigma_Y/\sqrt{n} \quad \rightarrow \quad 3 = \sigma_Y/\sqrt{49} \quad \rightarrow \quad \sigma_Y = 3/\sqrt{49} = 21.$$

6.21. Distribución muestral del número de aciertos, con $n\pi_A = 10$ y $n\pi_A(1-\pi_A) = 8$.

$$\pi_A = \frac{10}{n} \quad \rightarrow \quad 8 = n\frac{10}{n}(1-\frac{10}{n}) = 10 - \frac{100}{n} \quad \rightarrow \quad n = \frac{100}{10-8} = 50.$$

Por tanto, $\pi_A = 10/50 = 0{,}20$. Y, como la probabilidad de acierto es igual a 1 dividido entre el número de alternativas, tendremos: $0{,}20 = 1/k$; de donde $k = 1/0{,}20 = 5$.

6.22. Distribución muestral de la media con μ_Y y σ_Y desconocidas.

a. Sí, pues $\sigma_{\bar{Y}} = \sigma_Y/\sqrt{n}$.

b. No. Cuando $k = \mu_Y$, $P(\bar{Y} \geq k) = P(Y \geq k)$, pues μ_Y es el centro tanto de la distribución de Y como de la distribución $\bar{Y}$.

Cuando $k < \mu_Y$ tampoco se verifica $P(\bar{Y} \geq k) < P(Y \geq k)$, pues al ser la distribución de Y más dispersa que la de $\bar{Y}$, la proporción de área que queda por encima de k es mayor en la distribución de $\bar{Y}$ que en la de Y.

Cuando $k > \mu_Y$ si se verifica $P(\bar{Y} \geq k) < P(Y \geq k)$, pues al ser la distribución de Y más dispersa que la distribución de $\bar{Y}$, la proporción de área que queda por encima de k es mayor en la distribución de Y que en la de $\bar{Y}$.

6.23. *a*. Teniendo en cuenta los distintos caminos por los que puede llegarse a cada salida y el número de bolas (X) de comida que hay en cada salida y asumiendo que, en cada cruce, la probabilidad de optar por cualquiera de los dos caminos es la misma, tenemos:

A la salida A (una bola de comida) se puede llegar por dos caminos:

$P(A_1) = 0{,}5.$
$P(A_2) = 0{,}5\,(0{,}5)\,(0{,}5) = 0{,}125.$

A la salida B (dos bolas de comida) se puede llegar por dos caminos:

$P(B_1) = 0{,}5\,(0{,}5)\,(0{,}5) = 0{,}125.$
$P(B_2) = 0{,}5\,(0{,}5)\,(0{,}5) = 0{,}125.$

A la salida C (tres bolas de comida) se puede llegar por un sólo camino:

$P(C) = 0{,}5\,(0{,}5)\,(0{,}5) = 0{,}125.$

Por tanto,

X	*Salidas*	*Probabilidades*	*f*(*X*)
1	A_1, A_2	0,5 + 0,125	0,625
2	B_1, B_2	0,125 + 0,125	0,250
3	C	0,125	0,125

b. $E(X) = \sum X_i\, f(X_i) = 1\,(0{,}625) + 2\,(0{,}250) + 3\,(0{,}125) = 1{,}50.$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2{,}75 - 1{,}50^2 = 0{,}50.$

$E(X^2) = \sum X_i^2\, f(X_i) = 1^2(0{,}625) + 2^2(0{,}250) + 3^2(0{,}125) = 2{,}75.$

6.24. Lo que ocurre con dos ratas es fácil de saber si se considera que el resultado que consiguen entre las dos (Y = «número de bolas») no es más que la suma del número de bolas que consigue cada una por separado. Es decir, $Y = X + X$. Ahora bien, la media de una suma es la suma de las medias (ver, en el Capítulo 4, la nota a pie de página número 2); por tanto: $E(Y) = 2\,E(X) = 2\,(1{,}50) = 3$. Y, cuando dos variables son independientes (como es el caso, pues las ratas recorren independientemente el laberinto), la varianza de una suma es la suma de las varianzas; por tanto, $V(Y) = 2\,V(X) = 2\,(0{,}50) = 1$.

No obstante, también puede obtenerse la distribución muestral de Y y calcular a partir de ella el valor esperado y la varianza de Y:

Y	*Salidas*	*Probabilidades*	*f*(*Y*)
2	AA	0,625 (0,625)	0,390625
3	AB, BA	0,625 (0,25) + 0,25 (0,625)	0,312500
4	AC, CA, BB	0,625 (0,125) + 0,125 (0,625) + 0,25 (0,25)	0,218750
5	BC, CB	0,25 (0,125) + 0,125 (0,25)	0,062500
6	CC	(0,125) (0,125)	0,015625

b. $E(Y) = \sum Y_i\, f(Y_i) = 2\,(0{,}390625) + 3\,(0{,}312500) + \cdots + 6\,(0{,}015625) = 3.$

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 10 - 3^2 = 1.$

$E(X^2) = \sum X_i^2\, f(X_i) = 2^2(0{,}390625) + 3^2(0{,}312500) + \cdots + 6^2(0{,}015625) = 10.$

Capítulo 7

7.1. Intervalo de confianza para el parámetro *media* con $\sigma_Y = 15$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\sigma_{\bar{Y}} = \sigma_Y/\sqrt{n} = 15/\sqrt{100} = 1{,}5$.
- $E_{\text{máx}} = |Z_{0{,}025}|\,\hat{\sigma}_{\bar{Y}} = 1{,}96(1{,}5) = 2{,}94$.
- $L_i = 104 - 2{,}94 = 101{,}06$.

  $L_s = 104 + 2{,}94 = 106{,}94$.

El intervalo de confianza no incluye el valor 100. No parece, por tanto, que la media de la nueva escala sea igual que la del WAIS.

7.2. Intervalo de confianza para el parámetro *media* con $\sigma_Y = 15$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\sigma_{\bar{Y}} = \sigma_Y/\sqrt{n} = 15/\sqrt{30} = 2{,}74$.
- $E_{\text{máx}} = |Z_{0{,}025}|\,\hat{\sigma}_{\bar{Y}} = 1{,}96(2{,}74) = 5{,}37$.
- $L_i = 104 - 5{,}37 = 98{,}63$.

  $L_s = 104 + 5{,}37 = 109{,}37$.

Ahora, el intervalo de confianza incluye el valor 100. El resultado obtenido es compatible con la suposición de que la media de la nueva escala es igual que la del WAIS.

7.3. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción*, con $n = 40$ y $P_D = 8/40 = 0{,}20$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\hat{\sigma}_{P_D} = \sqrt{P_D(1-P_D)/n} = \sqrt{0{,}20(1-0{,}20)/40} = 0{,}06$.
- $E_{\text{máx}} = 1{,}96(0{,}06) = 0{,}12$.
- $L_i = 0{,}20 - 0{,}12 = 0{,}08$.

  $L_s = 0{,}20 + 0{,}12 = 0{,}32$.

7.4. Intervalo de confianza para el parámetro *media* con σ_Y desconocida y $n = 100$.
Aunque se desconoce el valor de σ_Y, la muestra es lo bastante grande como para poder utilizar la distribución normal sin problemas.

- $E_{\text{máx}} = (11-9)/2 = 1$.
- $\hat{\sigma}_{\bar{Y}} = S_Y/\sqrt{n} = 4/\sqrt{100} = 0{,}40$.
- $E_{\text{máx}} = |Z_{\alpha/2}|\,\hat{\sigma}_{\bar{Y}} \quad \rightarrow \quad 1 = |Z_{\alpha/2}|\,0{,}40 \quad \rightarrow \quad |Z_{\alpha/2}| = 1/0{,}40 = 2{,}50$.
- $P(Z \geq 2{,}50) = \alpha/2 = 0{,}0062 \quad \rightarrow \quad \alpha = 2(0{,}0062) = 0{,}0124$.
- $1 - \alpha = 1 - (0{,}0124) = 0{,}9876$.

7.5. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción*, con $n = 150$ y $P_H = 0{,}43$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\hat{\sigma}_{P_H} = \sqrt{P_H(1-P_H)/n} = \sqrt{0{,}43(1-0{,}43)/150} = 0{,}04$.
- $E_{\text{máx}} = 1{,}96(0{,}04) = 0{,}08$.
- $L_i = 0{,}43 - 0{,}08 = 0{,}35$.
  $L_s = 0{,}43 + 0{,}08 = 0{,}51$.

7.6. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción* con n desconocido y $P_H = 0{,}43$.

- $E_{\text{máx}} = 0{,}08/2 = 0{,}04$.
- $\hat{\sigma}_{P_H} = \sqrt{P_H(1-P_H)/n} = \sqrt{0{,}43(1-0{,}43)/n} = \sqrt{0{,}2451/n}$.
- $E_{\text{máx}} = |Z_{1-\alpha/2}|\,\hat{\sigma}_{\bar{Y}} \quad \rightarrow \quad 0{,}04 = 1{,}96\sqrt{0{,}2451/n}$.
- $n = 1{,}96^2(0{,}2451)/0{,}04^2 \approx 588$.

(Puede ahorrarse algo de trabajo aplicando la ecuación [7.21]).

7.7. Intervalo de confianza para el parámetro *media* con σ_Y desconocida y $n = 100$.
Aunque se desconoce el valor de σ_Y, la muestra es lo bastante grande como para poder utilizar la distribución normal sin problemas.

- $E_{\text{máx}} = 3$.
- $\hat{\sigma}_{\bar{Y}} = S_Y/\sqrt{n} = 15/\sqrt{100} = 1{,}5$.
- $E_{\text{máx}} = |Z_{\alpha/2}|\,\hat{\sigma}_{\bar{Y}} \quad \rightarrow \quad 3 = |Z_{\alpha/2}|\,1{,}5 \quad \rightarrow \quad |Z_{1-\alpha/2}| = 3/1{,}5 = 2{,}0$.
- $P(Z \geq 2{,}0) = \alpha/2 = 0{,}0228 \quad \rightarrow \quad \alpha = 2(0{,}0228) = 0{,}0456$.
- $1-\alpha = 1-(0{,}0456) = 0{,}9544$.

7.8. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción* con $n = 50$ y $P_A = 0{,}50$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\sigma_{P_A} = \sqrt{P_A(1-P_A)/n} = \sqrt{0{,}50(1-0{,}50)/50} = 0{,}071$.
- $E_{\text{máx}} = 1{,}96(0{,}071) = 0{,}14$.
- $L_i = 0{,}50 - 0{,}14 = 0{,}36$.
  $L_s = 0{,}50 + 0{,}14 = 0{,}64$.

Pensaremos que el sujeto no está respondiendo al azar cuando tenga menos de un 36 % de aciertos o más de un 64 %. Es decir, con 18 aciertos o menos y con 32 aciertos o más.

7.9. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción* con $n = 100$ y $P_D = 0{,}50$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\sigma_{P_D} = \sqrt{P_D(1-P_D)/n} = \sqrt{0{,}50(1-0{,}50)/100} = 0{,}05$.
- $E_{\text{máx}} = 1{,}96(0{,}05) = 0{,}098$.

- $L_i = 0{,}50 - 0{,}098 = 0{,}402$.

  $L_s = 0{,}50 + 0{,}098 = 0{,}598$.

Según el criterio establecido por el investigador, los estímulos dejarán de ser de dificultad media cuando los acierten menos del 40,2 % o más del 59,8 % de los sujetos. Por tanto, elegirá para su escala los pares de estímulos que sean percibidos como diferentes por un mínimo de 41 y un máximo de 59 sujetos.

7.10. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción* con $n = 15$ y $P_A = 0{,}50$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\sigma_{P_A} = \sqrt{P_A(1-P_A)/n} = \sqrt{0{,}50(1-0{,}50)/15} = 0{,}129$.
- $E_{\text{máx}} = 1{,}96(0{,}129) = 0{,}25$.
- $L_i = 0{,}50 - 0{,}25 = 0{,}25$.

  $L_s = 0{,}50 + 0{,}25 = 0{,}75$.

Si un sujeto responde al azar, cabe esperar que no acierte menos del 25 % ni más del 75 % de las preguntas. Es decir, no menos de 4 preguntas ni más de 11 (se obtiene el mismo resultado utilizando las probabilidades exactas de la distribución binomial).

7.11. Intervalo de confianza para el parámetro *proporción* con $n = 300$ y $P_D = 63/300 = 0{,}21$.

- $\alpha = 0{,}05$.
- $|Z_{\alpha/2}| = |Z_{0{,}025}| = 1{,}96$.
- $\sigma_{P_D} = \sqrt{P_D(1-P_D)/n} = \sqrt{0{,}21(1-0{,}21)/300} = 0{,}0235$.
- $E_{\text{máx}} = 1{,}96(0{,}0235) = 0{,}046$.
- $L_i = 0{,}21 - 0{,}046 = 0{,}164$.

  $L_s = 0{,}21 + 0{,}046 = 0{,}256$.

El psicólogo tiene razón: el porcentaje inicialmente informado parece demasiado alto. El porcentaje actual estimamos que se encuentra entre el 16,4 % y el 25,6 %.

7.12. La alternativa correcta es la *c* (que describe correctamente el significado de un intervalo de confianza). Un intervalo de confianza sobre la media se refiere siempre al parámetro μ; esto descarta la alternativa *a*. Cuando se construye un intervalo ya no existen variables (todo en él son constantes); por tanto, no tiene sentido hablar de probabilidad; esto descarta la alternativa *b*. En la alternativa *d* se confunde un intervalo con el 5 % de los intervalos. El intervalo de confianza no se refiere a puntuaciones individuales, sino a promedios; esto descarta la alternativa *e*.

7.13. La anchura o amplitud de un intervalo de confianza depende del tamaño del error máximo ($E_{\text{máx}}$), y éste depende de dos cosas: el nivel de confianza (cuanto mayor es el nivel de confianza, más ancho es el intervalo; esto descarta la alternativa *e*) y del error típico del estadístico utilizado como estimador (cuanto mayor es el error típico, más ancho es el intervalo; esto descarta la alternativa *f*). Ahora bien, el error típico depende a su vez de la dispersión de la población (cuanto mayor es la dispersión poblacional, más ancho es el intervalo; esto descarta la alternativa *c*) y del tamaño muestral (cuanto mayor es el tamaño muestral, menor es el error típico; esto descarta las alternativas *a* y *b*). Sólo es correcta, por tanto, la alternativa *d*.

7.14. La interpretación es incorrecta. Un intervalo de confianza nunca se refiere a las puntuaciones individuales de los sujetos, sino a algún parámetro (en este caso, al cociente intelectual medio de los universitarios españoles). La interpretación correcta de este intervalo es que tenemos una confianza del 95 % en que el verdadero cociente intelectual medio de los estudiantes universitarios se encuentre dentro del intervalo construido (98, 106).

Capítulo 8

8.1. Sólo son correctas las alternativas *c* y *d*. Las alternativas *a*, *e*, *g* y *h* son incorrectas porque las hipótesis alternativas contienen el signo "=". En la alternativa *b* falta el signo "=" en la hipótesis nula. Y las hipótesis de la alternativa *f* no son exclusivas.

8.2. La probabilidad mínima con la que puede ser rechazada una hipótesis verdadera es justamente la probabilidad asociada al estadístico de contraste obtenido. Y esa probabilidad no es otra cosa que el nivel crítico (valor *p*). La alternativa correcta es la *b*.

8.3. Todas las afirmaciones son falsas. Un contraste de hipótesis se basa en probabilidades y, por tanto, no es una prueba inequívoca de nada (esto descarta la alternativa *a*). El nivel crítico es una probabilidad condicional referida a los datos (al estadístico del contraste); esto no debe confundirse con una probabilidad referida a las hipótesis (esto descarta las alternativas *b* y *c*). La alternativa *d* también es una afirmación referida a la probabilidad de una hipótesis, pues una afirmación sobre la probabilidad de tomar una decisión errónea cuando se decide rechazar una hipótesis es una afirmación sobre la probabilidad de que la hipótesis rechazada sea verdadera (esto descarta la alternativa *d*). El nivel crítico es una probabilidad condicional; es decir, no es una probabilidad referida exactamente a los datos, sino una probabilidad referida a los datos cuando la hipótesis nula es verdadera; en la alternativa *e* se está asumiendo que H_0 es falsa y se está confundiendo $P(D)$ con $P(D|H_0)$, pues se está afirmando $1 - P(D)$ a partir de $P(D|H_0)$. Por último, la alternativa *f* incluye una afirmación de la hipótesis nula que no puede hacerse en un contraste de hipótesis (recuérdese la falacia de la afirmación del consecuente); del no rechazo de H_0 no se sigue que sea verdadera.

8.4. *a*. Rechazar H_0 si $P(V \geq V_k) \leq 0{,}05$.
b. Rechazarla. Porque $P(V \leq -1) < 0{,}05$.
c. $p = P(V \leq -1) = 0{,}03$.

8.5. Rechazarla, pues $P(n_1 \geq 4) = 0{,}026 < 0{,}05$.

8.6. *a*. Puesto que el nivel crítico ($p = P(T > 2{,}681) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$) es menor que el nivel de significación (0,05), la decisión razonable es rechazar H_0. Esto significa que puede concluirse que *ellas* fuman más que *ellos*, lo cual confirma la hipótesis del investigador.
b. $p = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$.

8.7. *a*. El primer terapeuta: H_0: $\pi_R \leq 0{,}80$; H_1: $\pi_R > 0{,}80$ (R = recuperación).
El segundo psicólogo: H_0: $\pi_R \geq 0{,}80$; H_1: $\pi_R < 0{,}80$.
b. Mantener H_0, porque $p = 0{,}818 > \alpha = 0{,}05$.
c. Rechazar H_0, porque $p = 0{,}002 < \alpha = 0{,}05$.
d. Puesto que sólo el segundo terapeuta rechaza su hipótesis nula, puede concluirse que la proporción de recuperaciones es menor que 0,80. Por tanto, tiene razón el segundo terapeuta.

8.8. *a*. H_0: $\pi_F \leq 0{,}30$; H_1: $\pi_F > 0{,}30$.
b. Mantenerla, porque $p = 0{,}07 > 0{,}05$.

8.9. La decisión correcta es rechazar H_0 porque $p = 0{,}005 < \alpha = 0{,}01$. Por tanto, la única alternativa correcta es la *d*.

8.10. Puesto que el contraste es unilateral derecho, la zona crítica está, toda ella, situada en la cola derecha de la distribución muestral. El estadístico del contraste toma un valor tal que por encima de él queda un área de tamaño 0,075, es decir, de tamaño superior al área correspondiente a la zona crítica (que vale $\alpha = 0{,}05$). En consecuencia, el estadístico del contraste cae fuera de la zona crítica y eso debe llevarnos a tomar la decisión de mantener H_0. Esto descarta las alternativas *a*, *c* y *d*.

La alternativa *e* también incluye una afirmación falsa, pues las inferencias estadísticas nunca se efectúan sobre valores muestrales, sino sobre valores poblacionales (la alternativa *e* sería falsa incluso aunque la afirmación que se hace estuviera referida a las medias poblacionales, pues se estaría afirmando una hipótesis nula y, con ello, se estaría cayendo en la falacia derivada de afirmar el consecuente).

Sólo queda la alternativa *b*, que es la correcta: no puede rechazarse H_0. Y no puede rechazarse porque, según se afirma en la alternativa *b*, el nivel crítico $p = 0{,}075$ es mayor que el nivel de significación establecido ($\alpha = 0{,}05$).

8.11. Puesto que $P(H < 6{,}13) = 0{,}05$, el estadístico del contraste, H, se encuentra en la cola izquierda de su distribución muestral (tiene asociado, por tanto, un nivel crítico de 0,95). Es decir, el estadístico H se encuentra justamente en el lado opuesto al de la zona de rechazo. Esto significa que la decisión apropiada es mantener la hipótesis nula: el nivel crítico asociado al estadístico de contraste, 0,95, es mucho mayor que cualquier nivel de significación razonable que se pueda establecer. Esto lleva a considerar como correcta la alternativa *a*, al tiempo que permite descartar las alternativas *b* y *d*.

Un nivel crítico (valor p) no permite conocer la probabilidad asociada a las hipótesis de un contraste. Esto descarta las alternativas *c* y *e*. Por otro lado, en relación con la última alternativa hay que decir, entre otras cosas, que mantener una hipótesis verdadera no es un error, por lo que no se puede hablar de probabilidad de equivocarse.

8.12. La distribución t de Student (ver Apéndice 5) acumula en sus colas más casos que la distribución normal. Esto significa que, para un mismo nivel de significación α, el punto crítico de una distribución t con un número finito de grados de libertad estará más alejado del centro de la distribución que el punto crítico equivalente en la distribución normal estandarizada. En consecuencia: (1) siempre que se rechace H_0 con V se rechazará con W; (2) siempre que se mantenga H_0 con W se mantendrá con V; y (3) es posible mantener con V y rechazar con W. Por tanto, es más probable rechazar con W que con V. Este razonamiento nos deja como única alternativa correcta la *b*.

Capítulo 9

9.1. Una variable dicotómica (recuperarse, no recuperarse).
Contraste sobre una proporción.

1. *Hipótesis*: H_0: $\pi_R \leq 0{,}25$; H_1: $\pi_R > 0{,}25$ (contraste unilateral derecho).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de tamaño 50 extraída de una población dicotómica con probabilidad de *recuperación* constante en cada extracción.
3. *Estadístico del contraste* (con $n = 50$, $\pi_R = 0{,}25$ y $n_R = 30$):

$$Z = [n_R - n\pi_R]/\sqrt{n\pi_R(1-\pi_R)} = [30 - 50(0{,}25)]/\sqrt{50(0{,}25)(1-0{,}25)} = 5{,}72.$$

4. *Distribución muestral*: Z se distribuye $N(0, 1)$.
5. *Zona crítica*: $Z \geq Z_{0,95} = 1{,}645$.
6. *Decisión*: el valor del estadístico del contraste (5,72) es mayor que el punto crítico (1,645); por tanto, se rechaza H_0. Puede afirmarse que la proporción de recuperaciones que consigue la terapia es mayor que la esperable por recuperación espontánea.

9.2. Una variable categórica (ideología política, con tres categorías).
Contraste sobre bondad de ajuste.

1. *Hipótesis*: $H_0: \pi_D = 1/4;\ \pi_C = 1/4;\ \pi_I = 2/4$.
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de $n = 24$ observaciones clasificada en tres categorías con probabilidad constante.
3. *Estadístico del contraste* ($m_D = 24\,(1/4) = 6;\ m_C = 24\,(1/4) = 6;\ m_I = 24\,(2/4) = 12$):
$$X^2 = \Sigma(n_i - m_i)^2/m_i = (5-6)^2/6 + (8-6)^2/6 + (11-12)^2/12 = 0{,}92.$$
4. *Distribución muestral*: X^2 se distribuye según $\chi^2_{I-1} = \chi^2_2$.
5. *Zona crítica*: $X^2 \geq \chi^2_{2;\,0,95} = 5{,}99$.
6. *Decisión*: el valor del estadístico del contraste (0,92) es menor que el punto crítico (5,99); por tanto, se mantiene H_0. Puede concluirse que los datos son compatibles con la hipótesis planteada.

9.3. Una variable dicotómica (recuperarse, no recuperarse).
Contraste sobre una proporción.

1. *Hipótesis*: $H_0: \pi_R = 0{,}80;\ H_1: \pi_R \neq 0{,}80$ (contraste bilateral).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de tamaño 100 extraída de una población dicotómica con probabilidad de *recuperación* constante en cada extracción.
3. *Estadístico del contraste* (con $n = 100$, $\pi_R = 0{,}80$ y $n_R = 100 - 27 = 73$):
$$Z = [n_R - n\pi_R]/\sqrt{n\pi_R(1-\pi_R)} = [73 - 100(0{,}80)]/\sqrt{100(0{,}80)} = -1{,}75.$$
4. *Distribución muestral*: Z se distribuye $N(0, 1)$.
5. *Zona crítica*: $Z \leq Z_{0,025} = -1{,}96$ y $Z \geq Z_{0,975} = 1{,}96$.
6. *Decisión*: el valor del estadístico del contraste ($-1{,}75$) se encuentra entre los puntos críticos $-1{,}96$ y 1,96. Por tanto, no puede rechazarse H_0. Puede concluirse que el resultado obtenido es compatible con la afirmación del terapeuta.

9.4. Una variable cuantitativa (Y = puntuaciones en la nueva escala de inteligencia).
Contraste sobre una media con σ_Y desconocida.

1. *Hipótesis*: H_0: $\mu_Y = 100$; H_1: $\mu_Y \neq 100$ (contraste bilateral).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria extraída de una población normal con σ_Y desconocida.
3. *Estadístico del contraste*: $T = (\bar{Y} - \mu_Y)/(S_Y/\sqrt{n}) = (105 - 100)/(16/\sqrt{100}) = 3{,}13$.
4. *Distribución muestral*: T se distribuye según $t_{n-1} = t_{99}$.
5. *Zona crítica*: $T \leq t_{99;\,0,025} = -1{,}984$ y $T \geq t_{99;\,0,975} = 1{,}984$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (3,13) es mayor que el punto crítico (1,984), se rechaza H_0. Por tanto, se puede concluir que la media de la nueva escala de inteligencia es distinta de la del WAIS.

9.5. Intervalo de confianza para la media (ecuación [7.11]), con $S_Y/\sqrt{n} = 16/\sqrt{100} = 1{,}6$:
$$IC_{\mu_Y} = \bar{Y} \pm t_{99;\,0,975}\, S_Y/\sqrt{n} = 105 \pm 1{,}984\,(1{,}6) = 105 \pm 3{,}17 = (101{,}83;\ 108{,}17).$$
Podemos estimar, con una confianza del 95%, que la media de la nueva escala se encuentra entre 101,83 y 108,17.

9.6. Una variable dicotómica (padecer o no trastorno depresivo).
Contraste sobre una proporción.

1. *Hipótesis*: H_0: $\pi_D \geq 0{,}32$; H_1 : $\pi_D < 0{,}32$ (contraste unilateral izquierdo).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de tamaño 300 extraída de una población dicotómica, con probabilidad de *padecer trastorno depresivo* constante en cada extracción.
3. *Estadístico del contraste* (con $n = 300$, $\pi_D = 0{,}32$ y $n_D = 63$):

$$Z = [n_D - n\pi_D]/\sqrt{n\pi_D(1-\pi_D)} = [63 - 300(0{,}32)]/\sqrt{300(0{,}32)(1-0{,}32)} = -4{,}08.$$

4. *Distribución muestral*: Z se distribuye $N(0, 1)$.
5. *Zona crítica*: $Z \leq Z_{0,05} = -2{,}33$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (−4,08) es menor que el punto crítico (−2,33), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que, en la población de desempleados, la proporción de personas con trastornos de tipo depresivo es menor que 0,32.

9.7. Una variable categórica (días de la semana).
Contraste sobre bondad de ajuste.

1. *Hipótesis*: H_0 : $\pi_L = \pi_M = \pi_X = \pi_J = \pi_V = \pi_D = 1/7$.
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de $n = 280$ observaciones clasificadas independientemente en las siete categorías de una variable.
3. *Estadístico del contraste* ($m_L = m_M = m_X = m_J = m_V = m_S = m_D = 280\,(1/7) = 40$):

$$X^2 = \Sigma(n_i - m_i)^2/m_i = (45-40)^2/40 + (50-40)^2/40 + \cdots + (25-40)^2/40 = 17{,}5.$$

4. *Distribución muestral*: X^2 se distribuye según $\chi^2_{I-1} = \chi^2_6$.
5. *Zona crítica*: $X^2 \geq \chi^2_{6;\,0,95} = 12{,}59$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (17,5) es mayor que el punto crítico (12,59), se rechaza H_0. Puede concluirse que los nacimientos no se reparten homogéneamente entre los días de la semana.

9.8. Intervalos de confianza sobre proporciones.
La siguiente tabla muestra los límites inferior y superior del intervalo de confianza para la proporción de nacimientos en cada categoría de la variable *días de la semana*.

Días semana	n_i	$P_i = n_i / n$	L_i	L_s	$\pi_i = 1/7 = 0{,}143$
Lunes	45	45/280 = 0,161	0,118	0,204	incluida en el intervalo
Martes	50	50/280 = 0,179	0,134	0,224	incluida en el intervalo
Miércoles	40	40/280 = 0,143	0,102	0,184	incluida en el intervalo
Jueves	55	55/280 = 0,196	0,150	0,242	no incluida en el intervalo
Viernes	35	35/280 = 0,125	0,086	0,164	incluida en el intervalo
Sábado	30	30/280 = 0,107	0,071	0,143	incluida en el intervalo
Domingo	25	25/280 = 0,089	0,056	0,122	no incluida en el intervalo

Estos intervalos se han calculado aplicando la ecuación [9.8]:

$$IC_{\pi_L} = 0{,}161 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}161(1-0{,}161)/280} = 0{,}161 \pm 0{,}043 = (0{,}118;\ 0{,}204).$$

$$IC_{\pi_M} = 0{,}179 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}179(1-0{,}179)/280} = 0{,}179 \pm 0{,}045 = (0{,}134;\ 0{,}224).$$

$$IC_{\pi_X} = 0{,}143 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}143(1-0{,}143)/280} = 0{,}143 \pm 0{,}041 = (0{,}102;\ 0{,}184).$$

$$IC_{\pi_J} = 0{,}196 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}196(1-0{,}196)/280} = 0{,}196 \pm 0{,}046 = (0{,}150;\ 0{,}242).$$

$IC_{\pi_V} \;=\; 0{,}125 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}125(1-0{,}125)/280} \;=\; 0{,}125 \pm 0{,}039 \;=\; (0{,}086;\ 0{,}164)$.

$IC_{\pi_S} \;=\; 0{,}107 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}107(1-0{,}107)/280} \;=\; 0{,}107 \pm 0{,}036 \;=\; (0{,}071;\ 0{,}143)$.

$IC_{\pi_D} \;=\; 0{,}089 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}089(1-0{,}089)/280} \;=\; 0{,}089 \pm 0{,}033 \;=\; (0{,}056;\ 0{,}122)$.

Las proporciones observadas que los intervalos de confianza delatan como significativamente distintas de la proporción esperada (0,143) son las correspondientes al jueves (donde hay más nacimientos de lo esperado) y al domingo (donde hay menos nacimientos de lo esperado).

9.9. Una variable cuantitativa (Y = puntuaciones en la escala de madurez).
Contraste sobre una media con σ_Y desconocida.

1. *Hipótesis*: H_0: $\mu_Y \leq 5$; H_1: $\mu_Y > 5$ (contraste unilateral derecho).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria extraída de una población normal con σ_Y desconocida.
3. *Estadístico del contraste*: $T \;=\; (\bar{Y} - \mu_Y)/(S_Y/\sqrt{n}) \;=\; (5{,}6-5)/(2/\sqrt{25}) \;=\; 1{,}5$.
4. *Distribución muestral*: T se distribuye según $t_{n-1} = t_{24}$.
5. *Zona crítica*: $T \geq t_{24;\,0{,}95} = 1{,}711$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (1,5) es menor que el punto crítico (1,711), se mantiene H_0. Por tanto, los datos obtenidos no permiten afirmar que la media de la escala de madurez haya aumentado.

9.10. Si los diagnósticos se hacen al azar, la probabilidad de que se dé una coincidencia vale 0,50 pues, de cuatro posibilidades (sí-sí, sí-no, no-sí, no-no), hay dos en las que los diagnósticos coinciden. Por tanto, se trata de averiguar si la proporción de coincidencias (π_C) en el diagnóstico de los dos psiquiatras es mayor que 0,50.

1. *Hipótesis*: H_0: $\pi_R \leq 0{,}50$; H_1 : $\pi_R > 0{,}50$ (contraste unilateral derecho).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de tamaño 10 extraída de una población dicotómica, con probabilidad de recuperación constante en cada extracción.
3. *Estadístico del contraste* (con n = 10, π_C = 0,50 y n_C = 7).
4. *Distribución muestral*: n_C se distribuye $B(10;\ 0{,}50)$.
5. *Nivel crítico*: $p \;=\; P(n_C \geq 7) \;=\; 1 - F(6) \;=\; 1 - 0{,}828 \;=\; 0{,}172$.
6. *Decisión*: dado que el nivel crítico (p = 0,172) es mayor que el nivel de significación establecido (α = 0,05), no es posible rechazar H_0. Por tanto, puede concluirse que el grado de acuerdo que han alcanzado los psiquiatras no supera el esperable por azar.

9.11. Una variable cuantitativa (Y = calificaciones en matemáticas).
Contraste sobre una media con σ_Y desconocida.

1. *Hipótesis*: H_0: $\mu_Y \leq 6{,}4$; H_1: $\mu_Y > 6{,}4$ (contraste unilateral derecho).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria extraída de una población normal con σ_Y desconocida.
3. *Estadístico del contraste*: $T \;=\; (\bar{Y} - \mu_Y)/(S_Y/\sqrt{n}) \;=\; (6{,}8-6{,}4)/(\sqrt{2/50}) \;=\; 2$.
4. *Distribución muestral*: T se distribuye según $t_{n-1} = t_{49}$.
5. *Zona crítica*: $T \geq t_{49;\,0{,}95} \approx 1{,}676$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (2) es mayor que el punto crítico (1,676), se rechaza H_0. Por tanto, se puede concluir que el rendimiento medio que se obtiene con el nuevo método es mayor que el que se venía obteniendo con el método tradicional.

9.12. Una variable dicotómica (recuperarse, no recuperarse).
Contraste sobre una proporción.

1. *Hipótesis*: H_0: $\pi_R \geq 0{,}90$; H_1 : $\pi_R < 0{,}90$ (contraste unilateral izquierdo).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de tamaño 10 extraída de una población dicotómica, con probabilidad de recuperación constante en cada extracción.

3. *Estadístico del contraste*: $n_R = 7$.
4. *Distribución muestral*: n_R se distribuye $B(10; 0{,}90)$.
5. *Nivel crítico*: $p = P(n_R \leq 7) = 0{,}070$.
6. *Decisión*: dado que el nivel crítico ($p = 0{,}070$) es mayor que el nivel de significación establecido ($\alpha = 0{,}05$), no es posible rechazar H_0. Por tanto, el resultado obtenido es compatible con la hipótesis de que al menos el 90% de los pacientes podrán recuperarse con el tratamiento.

9.13. Una variable dicotómica (recuperarse, no recuperarse).
Contraste sobre una proporción.

1. *Hipótesis*: H_0: $\pi_R \geq 0{,}90$; H_1 : $\pi_R < 0{,}90$ (contraste unilateral izquierdo).
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de tamaño 20 extraída de una población dicotómica, con probabilidad de recuperación constante en cada extracción.
3. *Estadístico del contraste*: $n_R = 14$.
4. *Distribución muestral*: n_R se distribuye $B(20; 0{,}90)$.
5. *Nivel crítico*: $P(n_R \leq 14) = 0{,}011$.
6. *Decisión*: dado que el nivel crítico ($p = 0{,}011$) es menor que el nivel de significación establecido ($\alpha = 0{,}05$), se rechaza H_0. Por tanto, no puede afirmarse que al menos el 90% de los pacientes podrá recuperarse con el tratamiento.

En ambos casos $P_R = 7/10 = 14/20 = 0{,}70$. Con $n = 20$, la diferencia entre la proporción teórica y la empírica ($\pi_R - P_R = 0{,}90 - 0{,}70 = 0{,}20$) es declarada estadísticamente significativa; con $n = 10$, esa diferencia no es lo bastante grande como para descartar que pueda producirse por azar. La razón de esto es que al aumentar el tamaño muestral disminuye el error típico del estadístico del contraste y eso permite trabajar con mayor precisión.

9.14. En un contraste bilateral sobre una proporción, con $n = 50$ y $\alpha = 0{,}05$, se rechaza la hipótesis nula cuando el estadístico Z toma un valor menor que $Z_{0,025}$ o mayor que $Z_{0,975}$. Por tanto, los valores n_M que llevarán a rechazar H_0 serán los correspondientes a $Z = -1{,}96$ y $Z = 1{,}96$. Estos valores pueden obtenerse a partir de la ecuación [9.2]:

$$Z_{0,025} = -1{,}96 = (n_{M_1} - 50(0{,}70)/\sqrt{(50(0{,}70)(1-0{,}70)} = (n_{M_1} - 35)/3{,}24.$$
$$n_{M_1} = -1{,}96\,(3{,}24) + 35 = 28{,}65.$$

$$Z_{0,975} = 1{,}96 = (n_{M_2} - 50(0{,}70)/\sqrt{(50(0{,}70)(1-0{,}70)} = (n_{M_2} - 35)/3{,}24.$$
$$n_{M_2} = 1{,}96\,(3{,}24) + 35 = 41{,}35.$$

Por tanto, no podrá rechazarse H_0: $\pi_M = 0{,}70$ cuando el número de mujeres en la muestra se encuentre entre 29 y 41.

9.15. Intervalo de confianza para la proporción (ecuación [7.16]), con $P_M = 39/50 = 0{,}78$:

$$IC_{\pi_M} = P_M \pm |Z_{0,025}|\sqrt{P_M(1-P_M)/n} =$$
$$= 0{,}78 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}78(1-0{,}78)/50} = 0{,}78 \pm 0{,}11 = (0{,}67;\ 0{,}89).$$

Podemos estimar, con una confianza del 95%, que la proporción de mujeres en la población de estudiantes de psicología se encuentra entre 0,67 y 0,89.

9.16. En el contraste unilateral derecho sobre una proporción, con $n = 17$ y $\alpha = 0{,}01$, se rechaza la hipótesis de que un sujeto está respondiendo al azar ($\pi_A = 0{,}05$) cuando obtiene un número de aciertos (n_A) cuya probabilidad asociada (es decir, la probabilidad de obtener ese número de aciertos o más) es menor que el nivel de significación establecido (0,01). Consultando la tabla de la *distribución binomial* (Tabla B del Apéndice final) se obtiene:

…

$P\,(n_A \geq 12) \;=\; 1 - F(11) \;=\; 1 - 0{,}928 \;=\; 0{,}072.$
$P\,(n_A \geq 13) \;=\; 1 - F(12) \;=\; 1 - 0{,}975 \;=\; 0{,}025.$
$P\,(n_A \geq 14) \;=\; 1 - F(13) \;=\; 1 - 0{,}994 \;=\; 0{,}006.$

…

Por tanto, para poder descartar que un sujeto está respondiendo al azar, debe obtener 14 aciertos o más.

9.17. En el contraste bilateral sobre una media, con σ_Y conocida y $\alpha = 0{,}05$, se rechaza H_0 cuando el estadístico Z toma un valor menor que $Z_{0{,}025}$ o mayor que $Z_{0{,}975}$. Por tanto, los valores $\bar{Y}$ que llevarán a rechazar H_0 serán los correspondientes a $Z = -1{,}96$ y $Z = 1{,}96$. Para conocer estos valores basta con aplicar la ecuación [9.10]:

$$Z_{0{,}025} \;=\; -1{,}96 \;=\; (\bar{Y}_1 - 420)/(18/\sqrt{36}) \quad \rightarrow \quad \bar{Y}_1 \;=\; -1{,}96\,(18/\sqrt{36}) + 420 \;=\; 414{,}12.$$

$$Z_{0{,}975} \;=\; 1{,}96 \;=\; (\bar{Y}_2 - 420)/(18/\sqrt{36}) \quad \rightarrow \quad \bar{Y}_2 \;=\; 1{,}96\,(18/\sqrt{36}) + 420 \;=\; 425{,}88.$$

Es decir, rechazaremos H_0 cuando $\bar{Y}$ tome un valor menor que 414,12 o mayor que 425,88.

9.18. *a*. Mantenerla.
b. Porque el nivel crítico asociado al estadístico de contraste ($p = 0{,}185$) es mayor que el nivel de significación adoptado ($\alpha = 0{,}05$). Es decir, porque $P(X^2 > 11{,}41) \;=\; 0{,}185 > 0{,}05$.
c. No existe razón para pensar que la variable estudiada no se distribuya según se propone en H_0, es decir, $B(n,\, \pi_1)$.

9.19. *a*. Si $X^2 = 0$, entonces todas las frecuencias observadas son iguales que sus correspondientes frecuencias esperadas: $n_i = m_i = n\text{p}_i$. Por tanto:

	X_1	X_2	X_3
n_i	100	60	40
m_i	100	60	40

b. Mantenerla.
c. $p \;=\; P(X^2 \geq 0) \;=\; 1.$

9.20. La probabilidad de acertar por azar una pregunta con 4 alternativas de respuesta vale $1/4 = 0{,}25$; por tanto, la función de probabilidad que se ofrece la tabla no es más que la distribución muestral del estadístico *número de aciertos por azar*. La probabilidad de obtener por azar $n_1 = 3$ aciertos o más vale $1 - 0{,}896 = 0{,}104$. En consecuencia, con 3 aciertos y habiendo fijado $\alpha = 0{,}05$ como criterio de decisión, no es posible rechazar la hipótesis de que el sujeto ha respondido al azar. La probabilidad de acertar 4 preguntas o más por azar vale $1 - 0{,}984 = 0{,}016$, y esa probabilidad es menor que $\alpha = 0{,}05$. Por tanto, con 4 aciertos o más puede rechazarse la hipótesis de que un sujeto ha respondido al azar.

9.21. En este estudio, el desempleo no es una variable, sino una constante. Por tanto, no tiene sentido hablar de si el desempleo está o no relacionado con algo. Este argumento sirve para declarar falsas todas las alternativas. Pero, además, en las alternativas *c*, *d* y *e* se está haciendo referencia a una relación de tipo causal entre el desempleo y los trastornos depresivos: incluso aunque se hubiera seleccionado una muestra de personas desempleadas y otra de personas empleadas, el tipo de estudio (no experimental) no permitiría hacer este tipo de afirmaciones.

Capítulo 10

10.1. *a*. 27,65% (553 de 2.000).

b. 16,05% (321 de 2000).

c. 7,18% (31 de 432).

d. 23,08% (51 de 221).

e. Prueba X^2 de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: la causa de la muerte es independiente de la edad.
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de 2.000 observaciones independientemente clasificadas en las 18 categorías resultantes de combinar dos variables categóricas.
3. *Estadístico del contraste*. Para obtener el estadístico de Pearson (ecuación [10.7]) es necesario calcular primero las frecuencias esperadas. La siguiente tabla recoge estas frecuencias; se han obtenido aplicando la ecuación [10.6]. Por ejemplo, la frecuencia esperada correspondiente a la primera casilla de la tabla se ha obtenido así: $\hat{m}_{11} = 221\,(112)/2.000 = 12{,}38$.

	15-30 años	31-50 años	51-70 años
Accidente	12,38	47,74	160,89
Cáncer	30,97	119,45	402,58
Enfermedad cardíaca	21,22	81,86	275,91
Homicidio	2,80	10,80	36,40
Suicidio	4,59	17,71	59,70
Otra causa	40,04	154,44	520,52

$$X^2 = \frac{(51-12{,}38)^2}{12{,}38} + \frac{(93-47{,}74)^2}{47{,}74} + \cdots + \frac{(715-520{,}52)^2}{520{,}52} = 410{,}03.$$

4. *Distribución muestral*: χ^2 con $(I-1)(J-1) = (6-1)(3-1) = 10$ grados de libertad (χ^2_{10}).
5. *Zona crítica*: $X^2 \geq \chi^2_{10;\,0,95} = 18{,}31$ (ver Tabla D del Apéndice final).
6. *Decisión*: el valor del estadístico del contraste (410,03) es mayor que el punto crítico (18,31); por tanto, se rechaza H_0 y se concluye que la causa de la muerte está relacionada con la edad.

f. La intensidad de la relación puede estimarse utilizando alguna medida de asociación como, por ejemplo, el coeficiente de contingencia (ver ecuación [10.9]): $C = \sqrt{410{,}03/(410{,}03+n)} = 0{,}41$. Este valor puede parecer, en principio, que refleja una asociación de intensidad media. Sin embargo, teniendo en cuenta que la interpretación de una medida de asociación depende del contexto, es muy probable que con este tipo de variables (causa de la muerte, grupos de edad) y con una muestra de 2.000 personas, un valor de 0,41 esté reflejando un grado de asociación bastante importante.

g. Para saber qué causas de muerte predominan en cada grupo de edad vamos a calcular los residuos tipificados corregidos. La siguiente tabla muestra el valor de estos residuos tras aplicar la ecuación [10.14]. Por ejemplo, el residuo tipificado corregido correspondiente a la primera casilla de la tabla se obtiene mediante: $Z_{R_{ij\,(\text{corregido})}} = (51-12{,}38)/\sqrt{12{,}38\,(1-221/2000)\,(1-112/2000)} = 11{,}98$.

Los residuos tipificados mayores que 1,96 (cuantil 97,5 de la distribución normal tipificada) permiten identificar las casillas en las que el número de casos es significativamente mayor que el que pronostica la hipótesis de independencia (es decir, significativamente mayor que el que cabe esperar por azar cuando las variables son realmente independientes).

Por tanto, los residuos mayores que 1,96 están indicando qué causas de muerte predominan en cada grupo de edad. Y la pauta que se observa en el ejemplo es bastante clara: en los dos grupos de menor edad (es decir, 15-30 y 31-50) hay más muertes de las esperadas por accidente, homicidio y suicidio; mientras que en el grupo de mayor edad (es decir, 51-70) hay más muertes de las esperadas por cáncer y enfermedad cardíaca.

	15-30 años	31-50 años	51-70 años
Accidente	11,98	7,85	−13,45
Cáncer	−5,43	−6,74	9,03
Enfermedad cardíaca	−4,27	−3,86	5,78
Homicidio	6,35	4,25	−7,21
Suicidio	4,61	3,64	−5,75
Otra causa	−3,25	1,42	0,36

10.2. *a*. Porcentajes de fila (la suma de los porcentajes de cada fila suman 100).

	A favor	En contra	*Total*
Solteros	86,7 %	13,3 %	100 %
Casados	25,0 %	75,0 %	100 %
Divorciados / separados	40,0 %	60,0 %	100 %
Viudos	40,0 %	60,0 %	100 %
Total	48,0 %	52,0 %	100 %

b. Prueba X^2 de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: la actitud hacia el aborto es independiente del estado civil.
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de 500 observaciones independientemente clasificadas en las 8 categorías resultantes de combinar dos variables categóricas.
3. *Estadístico del contraste*. Para obtener el estadístico de Pearson (ecuación 10.7) es necesario calcular primero las frecuencias esperadas. La siguiente tabla recoge estas frecuencias; se han obtenido aplicando la ecuación 10.6. Por ejemplo, la frecuencia esperada correspondiente a la primera casilla de la tabla se obtiene mediante: $\hat{m}_{11} = 150(240)/500 = 72$.

	A favor	En contra	*Total*
Solteros	72	78	150
Casados	96	104	200
Divorciados / separados	48	52	100
Viudos	24	26	50
Total	240	260	500

$$X^2 = \frac{(130-72)^2}{72} + \frac{(20-78)^2}{78} + \cdots + \frac{(30-26)^2}{26} = 136{,}08$$

4. *Distribución muestral*: χ^2 con $(I-1)(J-1) = (4-1)(2-1) = 3$ grados de libertad (χ^2_3).
5. *Zona crítica*: $X^2 \geq \chi^2_{3;\,0,95} = 7{,}81$ (ver Tabla D del Apéndice final).
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (136,08) es mayor que el punto crítico (7,81), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que la actitud hacia el aborto está relacionada con el estado civil.

c. Para interpretar la relación encontrada debemos basarnos en los porcentajes de fila o columna (utilizaremos los porcentajes de fila que ya tenemos calculados en el apartado *a*) y los residuos tipificados corregidos. La siguiente tabla ofrece el valor que toman estos residuos tras aplicar la ecuación [10.14]. Por ejemplo, el residuo tipificado corregido correspondiente a la primera casilla de la tabla se obtiene de la siguiente manera:

$Z_{R_{ij\,(\text{corregido})}} = (130-72)\big/\sqrt{72\,(1-150/500)\,(1-240/500)} = 11{,}33.$

	A favor	En contra
Solteros	11,3	−11,3
Casados	−8,4	8,4
Divorciados / separados	−1,8	1,8
Viudos	−1,2	1,2

Los porcentajes de fila calculados en el apartado *a* de este mismo ejercicio indican que el porcentaje de personas que está a favor del aborto (48%) es muy parecido al de personas que están en contra (52%). Pero el hecho de que las variables estén relacionadas significa que esa pauta en la actitud hacia el aborto (48% frente a 52%) no se reproduce en todos los estados civiles. Los residuos tipificados corregidos permiten precisar dónde se rompe esa pauta. En concreto, entre los *solteros* se observa un desplazamiento significativo de casos hacia la categoría *a favor* (pues 11,3 es mayor que 1,96), mientras que entre los *casados* se observa un desplazamiento significativo de casos hacia el *en contra* (pues 8,4 es mayor que 1,96). Es decir, hay más solteros a favor y más casados en contra de lo que pronostica la hipótesis de independencia. No puede afirmarse que los porcentajes de fila de los otros dos grupos se alejen de lo esperado (los cuatro residuos están comprendidos entre −1,96 y 1,96).

10.3. *a*. Prueba X^2 de Pearson sobre independencia o igualdad de proporciones.

b. H_0: usar o no transporte público es independiente de la ciudad donde se vive (o bien, la proporción de usuarios de transporte público es la misma en las 4 ciudades).

c. $X^2 < 7{,}81$.

d. Rechazarla, porque $9{,}25 > 7{,}81$.

e. Las proporción de personas que usa transporte público no es la misma en las cuatro ciudades. Es decir, usar o no transporte público está relacionado con la ciudad donde se vive.

10.4. Prueba X^2 de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: el hábitat es independiente de padecer o no trastorno depresivo.
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de 300 observaciones independientemente clasificadas en las 6 categorías resultantes de combinar dos variables categóricas.
3. *Estadístico del contraste*. Para obtener el estadístico de Pearson (ecuación [10.7]) comenzamos calculando las frecuencias esperadas. La siguiente tabla recoge estas frecuencias; se han obtenido aplicando la ecuación [10.6]. Por ejemplo, la frecuencia esperada correspondiente a la primera casilla de la tabla se obtiene mediante: $\hat{m}_{11} = 60(100)/300 = 20$.

	Rural	Semiurbano	Urbano	*Total*
Sí	20	20	20	60
No	80	80	80	240
Total	100	100	100	300

$$X^2 = \frac{(12-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} + \cdots + \frac{(68-80)^2}{80} = 14{,}0$$

4. *Distribución muestral*: χ^2 con $(I-1)(J-1) = (2-1)(3-1) = 2$ grados de libertad (χ^2_2).
5. *Zona crítica*: $X^2 \geq \chi^2_{2;\,0,95} = 5{,}99$ (ver Tabla D del Apéndice final).
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (14,0) es mayor que el punto crítico (5,99), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que, en la población de desempleados, las variables *hábitat* y *padecer o no trastorno depresivo* están relacionadas. O, lo que es lo mismo: la proporción de desempleados con trastorno depresivo no es la misma en los tres hábitats estudiados.

10.5. *a*. Prueba X^2 de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: el tabaquismo es independiente de los problemas respiratorios.
2. *Supuestos*: muestra aleatoria de 320 observaciones independientemente clasificadas en las 4 categorías resultantes de combinar dos variables categóricas.
3. *Estadístico del contraste*. Para obtener el estadístico de Pearson (ecuación [10.7]) comenzamos calculando las frecuencias esperadas. La siguiente tabla recoge estas frecuencias; se han obtenido aplicando la ecuación [10.6]. Por ejemplo, la frecuencia esperada correspondiente a la primera casilla de la tabla se obtiene así: $\hat{m}_{11} = 112(80)/320 = 28$.

	Sí	No
Fumadores	28	84
No fumadores	52	156

$$X^2 = \frac{(52-28)^2}{28} + \frac{(60-84)^2}{84} + \frac{(28-52)^2}{52} + \frac{(180-156)^2}{156} = 42{,}20$$

4. *Distribución muestral*: χ^2 con $(I-1)(J-1) = (2-1)(2-1) = 1$ grados de libertad (χ^2_1).
5. *Zona crítica*: $X^2 \geq \chi^2_{1;\,0,95} = 3{,}84$ (ver Tabla D del Apéndice final).
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (42,20) es mayor que el punto crítico (3,84), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que el tabaquismo está relacionado con tener o no problemas respiratorios. O, lo que es lo mismo: la proporción de sujetos con problemas respiratorios no es la misma entre los fumadores y entre los no fumadores.

b. Con un diseño de estas características (no hay asignación aleatoria de los sujetos a las condiciones del estudio) no es posible determinar si el tabaquismo produce problemas respiratorios. Lo único que se puede afirmar es que existe relación.

10.6. Todas las afirmaciones son falsas. La única conclusión válida de un estudio de estas características es que el *salario está relacionado con el nivel educativo* (esto es lo que implica el rechazo de la hipótesis de independencia). Esto descarta las alternativas en las que implícita o explícitamente se afirma que no existe relación: *b*, *c* y *e*.

La alternativa *a* afirma que la relación encontrada es de naturaleza causal, y esto es algo que excede el alcance de un estudio no experimental cuando, como es el caso, no existe una teoría previa que justifique el hallazgo.

En la alternativa *d* se hace una afirmación categórica que no se corresponde con la lógica del contraste de hipótesis. Un contraste de hipótesis se basa en probabilidades y, por tanto, no es una prueba definitiva o inequívoca de nada.

El nivel crítico ($p = 0{,}001$) es una probabilidad *condicional* referida a los datos (al estadístico del contraste). Esto no debe confundirse con una probabilidad referida a las hipótesis. Y una afirmación sobre la probabilidad de tomar una decisión equivocada cuando se decide rechazar una hipótesis es una afirmación sobre la probabilidad de que la hipótesis rechazada sea verdadera. Esto descarta la alternativa *f*.

10.7. *a*. Mantenerla; porque $P(X^2 \geq 3) = 0{,}30 > 0{,}05$.
b. $p = 0{,}30$.

10.8. La situación descrita exige relacionar dos variables categóricas: curso y tipo de examen; o lo que es lo mismo, comparar dos muestras independientes (una de estudiantes de primero y otra de estudiantes de segundo) en una variable categórica (tipo de examen).

La hipótesis de investigación debe estar referida a las distribuciones de ambas poblaciones en la variable categórica. Podría formularse en los siguientes términos: *los estudiantes de primero difieren de los estudiantes de segundo en el tipo de examen que prefieren*. Las hipótesis nula y alternativa que corresponden a esta hipótesis de investigación son las siguientes:

- H_0 : las variables *curso* y *tipo de examen* son independientes.
- H_1 : las variables *curso* y *tipo de examen* no son independientes.

10.9. Puesto que el nivel crítico (0,0001) asociado al estadístico del contraste es muy pequeño (menor que cualquier nivel de significación estándar), la decisión correcta será rechazar H_0 y concluir que los estudiantes de 1º y 2º difieren en el tipo de examen que prefieren. Esto nos debe llevar a seleccionar la alternativa *d* como correcta y descartar las alternativas *c* y *e*. La alternativa *a* es incorrecta porque se insinúa que la relación encontrada es de naturaleza causal ("la preferencia... *depende* del curso"), cosa que no puede afirmarse en un estudio de estas características. Y la alternativa *b* es incorrecta porque las conclusiones de un contraste no se refieren a las muestras utilizadas para realizar el contraste, sino a las poblaciones a las que esas muestras representan.

10.10. Las conclusiones de un contraste nunca se refieren a las muestras utilizadas en el contraste, sino a las poblaciones a las que representan; esto permite descartar las dos primeras alternativas. Los parámetros no son *variables*, sino *constantes*; y las constantes no tienen distribución de probabilidad; esto descarta la alternativa *c*. Las alternativas *d* y *e* son correctas: la primera se refiere a la hipótesis de *igualdad de proporciones*; la segunda, a la hipótesis de *independencia* entre variables.

Capítulo 11

11.1. *a*. Comparar dos variables cuantitativas (número de errores) medidas en los mismos sujetos. Prueba *T* para muestras relacionadas.

1. *Hipótesis:* $H_0: \mu_{\text{antes}} \leq \mu_{\text{después}}$ $(\mu_D \leq 0)$.
$H_1: \mu_{\text{antes}} > \mu_{\text{después}}$ $(\mu_D > 0)$ (contraste unilateral derecho).
2. *Supuestos*: asumimos que la muestra de 7 diferencias se ha seleccionado aleatoriamente de una población normal.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.6]): $T = \dfrac{15-7}{3{,}606/\sqrt{7}} = \dfrac{8}{1{,}363} = 5{,}87$.

4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n - 1 = 7 - 1 = 6$ grados de libertad.
5. *Zona crítica*: $T \geq t_{6;\,0{,}95} = 1{,}943$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (5,87) es mayor que el punto crítico (1,943), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que el número medio de errores ha disminuido tras el entrenamiento.
7. *Nivel crítico*: $p = P(T \geq 5{,}87) < 0{,}001$.

b. Intervalo de confianza (ecuación [12.7], con $S_D/\sqrt{n} = 1{,}363$; denominador del estadístico T):

$$IC_{\mu_D} = (15 - 7) \pm t_{6;\,0{,}975}\,(1{,}363) = 8 \pm 2{,}447\,(1{,}363) = 8 \pm 3{,}34 = (4{,}66;\ 11{,}34).$$

Estimamos, con una confianza del 95%, que la verdadera disminución en el número de errores se encuentra entre 4,66 y 11,34. Teniendo en cuenta que el número de errores es una variable discreta, esto significa entre 5 y 11 errores (es decir, más de 4 y menos de 12).

11.2. *a*. Coeficiente de correlación de Pearson (ecuación [12.10]).
Comenzamos calculando las puntuaciones diferenciales para poder obtener a partir de ellas las varianzas y la covarianza:

Sujetos	1	2	3	4	5	6	7	
y_1: antes	4	−2	5	−3	0	2	−6	
y_2: después	0	2	3	−3	−4	3	−1	*Suma*
$(y_1)^2$	16	4	25	9	0	4	36	94
$(y_1)^2$	0	4	9	9	16	9	1	48
$(y_1)(y_2)$	0	−4	15	9	0	6	6	32

$$S^2_{Y_1} = \sum y_1^2/(n-1) = 94/6 = 15{,}67 \quad \rightarrow \quad S_{Y_1} = \sqrt{15{,}67} = 3{,}96.$$

$$S^2_{Y_2} = \sum y_2^2/(n-1) = 48/6 = 8 \quad \rightarrow \quad S_{Y_2} = \sqrt{8} = 2{,}83.$$

$$S_{Y_1Y_2} = \sum y_1 y_2/(n-1) = 32/6 = 5{,}33 \quad \text{(ecuación [12.9])}.$$

$$R_{XY} = S_{Y_1Y_2}/(S_{Y_1}S_{Y_2}) = 5{,}33/(3{,}96 \times 2{,}83) = 0{,}48 \quad \text{(ecuación [12.10])}.$$

b. Contraste de hipótesis sobre el coeficiente de correlación de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: $\rho_{XY} = 0$.
   H_1: $\rho_{XY} \neq 0$ (contraste bilateral).
2. *Supuestos*: asumimos que los 7 pares de puntuaciones constituyen una muestra aleatoria de una población normal.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.14]): $T = \dfrac{0{,}48\sqrt{7-2}}{\sqrt{1-0{,}48^2}} = 1{,}22$.
4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n - 2 = 7 - 2 = 5$ grados de libertad (t_5).
5. *Zona crítica*: $T \leq t_{5;\,0{,}025} = -2{,}571$ y $T \geq t_{5;\,0{,}975} = 2{,}571$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (1,22) se encuentra entre ambos puntos críticos, se mantiene H_0. Por tanto, no puede afirmarse que las medidas *antes* y *después* estén significativamente relacionadas.
7. *Nivel crítico*: $p = 2\,[P(T \geq 1{,}22)] > 0{,}20$.

c. Con variables cuantitativas, comparar y relacionar no son la misma cosa (ver el apartado *Comparar o relacionar*, al principio del capítulo). La comparación se centra en los promedios; la relación en la forma de variar las puntuaciones. El hecho de que existan diferencias quiere decir que los sujetos, en promedio, han disminuido sus errores. El hecho de que la relación entre los dos momentos no sea significativa indica que la disminución no ha sido lineal, es decir, no ha sido la misma o aproximadamente la misma en todos los sujetos, ni tampoco ha sido proporcional al número inicial de errores.

11.3. *a*. Comparar dos variables cuantitativas (número de aciertos) medidas en pares de sujetos. Prueba T para muestras relacionadas.

1. *Hipótesis:* $H_0: \mu_{\text{con}} \geq \mu_{\text{sin}}$ ($\mu_D \geq 0$).
   $H_1: \mu_{\text{con}} < \mu_{\text{sin}}$ ($\mu_D < 0$) (contraste unilateral izquierdo).

   Si el alcohol reduce la capacidad de los sujetos para reconocer palabras, el número de aciertos del grupo experimental (con alcohol) será menor que el del grupo control (sin alcohol), de ahí que se esté planteando un contraste unilateral izquierdo.

2. *Supuestos*: contamos con una muestra aleatoria de 10 diferencias extraídas de una población normal.

3. *Estadístico del contraste*:

Pares	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y_1: Sin	2	1	1	3	2	5	1	3	3	2	
Y_2: Con	4	3	5	7	8	5	4	6	4	5	*Total*
D	−2	−2	−4	−4	−6	−0	−3	−3	−1	−3	−28
$(D-\bar{D})^2$	0,64	0,64	1,44	1,44	10,2	7,84	0	0	3,24	0	25,6

$$\bar{D} = -28/10 = -2{,}8.$$

$$S_D^2 = 25{,}6/9 = 2{,}844.$$

$$S_D = \sqrt{2{,}844} = 1{,}687.$$

$$T = \frac{-2{,}8 - 0}{1{,}687/\sqrt{10}} = \frac{-2{,}8}{0{,}533} = -5{,}25.$$

4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n-1 = 10-1 = 9$ grados de libertad (t_9).
5. *Zona crítica*: $T \leq t_{9;\,0{,}05} = -1{,}833$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (−5,25) es menor que el punto crítico (−1,833), se rechaza H_0. Por tanto, puede afirmarse que el promedio de aciertos del grupo experimental (con alcohol) es menor que el del grupo control (sin alcohol).
7. *Nivel crítico*: $p = P(T \leq -5{,}25) < 0{,}001$.

b. Intervalo de confianza (ecuación [12.7], con $S_D/\sqrt{n}$ = 0,533; denominador del estadístico T):

$$IC_{\mu_D} = |-2{,}8| \pm t_{9;\,0{,}975}\,(0{,}533) = 2{,}8 \pm 2{,}262\,(0{,}533) = 2{,}8 \pm 1{,}21 = (1{,}59;\ 4{,}01).$$

Estimamos, con una confianza del 95%, que la verdadera diferencia en el número de aciertos se encuentra entre 1,59 y 4,01. Teniendo en cuenta que el número de aciertos es una variable discreta, esto significa entre 2 y 4 aciertos (es decir, más de 1 y menos de 5).

11.4. Vamos a comenzar construyendo una tabla con los cálculos necesarios para resolver las cuestiones planteadas:

Pares	Y_1	Y_2	D	$(d)^2$	y_1	y_2	$(y_1)^2$	$(y_2)^2$	$(y_1)(y_2)$
1	23	17	6	1	5	6	25	36	30
2	10	5	5	4	−8	−6	64	36	48
3	15	10	5	4	−3	−1	9	1	3
4	17	12	5	4	−1	1	1	1	−1
5	22	15	7	0	4	4	16	16	16
6	25	15	10	9	7	4	49	16	28
7	20	12	8	1	2	1	4	1	2
8	25	18	7	0	7	7	49	49	49
9	11	6	5	4	−7	−5	49	25	35
10	16	9	7	0	−2	−2	4	4	4
11	13	10	3	16	−5	−1	25	1	5
12	19	15	4	9	1	4	1	16	4
13	21	4	17	100	3	−7	9	49	−21
14	23	3	20	169	5	−8	25	64	−40
15	10	14	−4	121	−8	3	64	9	−24
	270	165	105	442			394	324	138

$\bar{Y}_1 = 270/15 = 18 \qquad \bar{Y}_2 = 165/15 = 11 \qquad \bar{D} = 105/15 = 7.$

$S_D^2 = \sum d_Y^2/(n-1) = 442/14 = 31{,}571 \rightarrow S_D = \sqrt{31{,}571} = 5{,}62.$

$S_{Y_1}^2 = \sum y_1^2/(n-1) = 394/14 = 28{,}143 \rightarrow S_{Y_1} = \sqrt{28{,}143} = 5{,}30.$

$S_{Y_2}^2 = \sum y_2^2/(n-1) = 324/14 = 23{,}143 \rightarrow S_{Y_2} = \sqrt{23{,}143} = 4{,}81.$

$S_{Y_1Y_2} = \sum y_1y_2/(n-1) = 138/14 = 9{,}86.$

a. Comparar dos variables cuantitativas (puntuaciones en agresividad) medidas en pares de sujetos. Prueba T para muestras relacionadas.

1. *Hipótesis:* H_0: $\mu_{\text{antes}} \le \mu_{\text{después}}$ $(\mu_D \le 0)$.
   H_1: $\mu_{\text{antes}} > \mu_{\text{después}}$ $(\mu_D > 0)$ (contraste unilateral derecho).
2. *Supuestos*: asumimos que la muestra de 15 diferencias se ha seleccionado aleatoriamente de una población normal.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.6]): $T = \dfrac{18-11}{5{,}62/\sqrt{15}} = \dfrac{7}{1{,}451} = 4{,}82.$

4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n - 1 = 15 - 1 = 14$ grados de libertad.
5. *Zona crítica*: $T \geq t_{14;\,0,95} = 1{,}761$.
6. Decisión: como el valor del estadístico del contraste (4,82) es mayor que el punto crítico (1,761), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que la media en la escala de agresividad es mayor en los gemelos nacidos en primer lugar.
7. Nivel crítico: $p = P(T \geq 4{,}82) < 0{,}001$.

b. Intervalo de confianza (ecuación [12.7], con $S_D/\sqrt{n} = 1{,}451$; denominador del estadístico T):

$IC_{\mu_D} = (18 - 11) \pm t_{14;\,0.975}\,(1{,}451) = 7 \pm 2{,}145\,(1{,}451) = 7 \pm 3{,}11 = (3{,}89;\ 10{,}11)$.

Estimamos, con una confianza del 95%, que la verdadera diferencia en las puntuaciones medias en la escala de agresividad se encuentra entre 3,89 y 10,11 puntos.

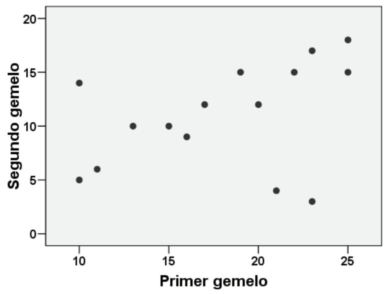
c. Coeficiente de correlación de Pearson (ecuación [12.10]):

$R_{XY} = S_{Y_1Y_2}/(S_{Y_1}S_{Y_2}) = 9{,}86/(5{,}30 \times 4{,}81) = 0{,}39$.

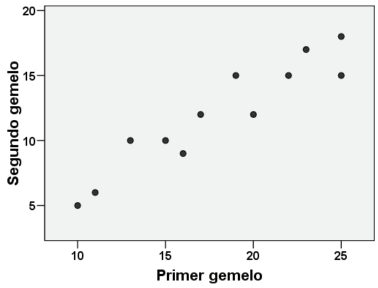
d. Contraste de hipótesis sobre el coeficiente de correlación de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: $\rho_{XY} = 0$; H_1: $\rho_{XY} \neq 0$ (contraste bilateral).
2. *Supuestos*: asumimos que los 15 pares de puntuaciones constituyen una muestra aleatoria de una población normal.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.14]): $T = 0{,}39\sqrt{15-2}/\sqrt{1-0{,}39^2} = 1{,}53$.
4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n - 2 = 15 - 2 = 13$ gl (t_{13}).
5. *Zona crítica*: $T \leq t_{13;\,0,025} = -2{,}160$ y $T \geq t_{5;\,0,975} = 2{,}160$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (1,53) se encuentra entre ambos puntos críticos, se mantiene H_0. Por tanto, no puede afirmarse que las puntuaciones de los gemelos en agresividad estén linealmente relacionadas.
7. *Nivel crítico*: $p = 2\,[P(T \geq 1{,}53)] > 0{,}10$.

11.5. *a*. Diagrama de dispersión:



b. El par nº 13 (con puntuaciones 21 y 4), el par nº14 (con puntuaciones 23 y 3) y el par nº15 (con puntuaciones 10 y 14). En el diagrama de dispersión se observa que a estos tres pares les corresponden puntos que se alejan de una imaginaria línea recta ascendente. En el diagrama de dispersión construido sin esos tres pares se observa claramente una nube de puntos agrupada en torno a una línea recta ascendente:



c. Coeficiente de correlación de Pearson (ecuación [12.10]) tras eliminar los pares 13, 14 y 15. Comenzamos construyendo la siguiente tabla para facilitar los cálculos:

Pares	Y_1	Y_2	y_1	y_2	$(y_1)^2$	$(y_2)^2$	$(y_1)(y_2)$
1	23	17	5	5	25	25	25
2	10	5	−8	−7	64	49	56
3	15	10	−3	−2	9	4	6
4	17	12	−1	0	1	0	0
5	22	15	4	3	16	9	12
6	25	15	7	3	49	9	21
7	20	12	2	0	4	0	0
8	25	18	7	6	49	36	42
9	11	6	−7	−6	49	36	42
10	16	9	−2	−3	4	9	6
11	13	10	−5	−2	25	4	10
12	19	15	1	3	1	9	3
	216	144			296	190	223

$$\bar{Y}_1 = 216/12 = 18, \qquad \bar{Y}_2 = 144/12 = 12.$$
$$S^2_{Y_1} = \sum y_1^2/(n-1) = 296/11 = 26{,}909 \quad \rightarrow \quad S_{Y_1} = \sqrt{26{,}909} = 5{,}19.$$
$$S^2_{Y_2} = \sum y_2^2/(n-1) = 190/11 = 17{,}273 \quad \rightarrow \quad S_{Y_2} = \sqrt{17{,}273} = 4{,}16.$$
$$S_{Y_1Y_2} = \sum y_1 y_2/(n-1) = 223/11 = 20{,}27.$$
$$R_{XY} = S_{Y_1Y_2}/(S_{Y_1}S_{Y_2}) = 20{,}27/(5{,}19 \times 4{,}16) = 0{,}94.$$

Al eliminar del análisis los pares 13, 14 y 15, el coeficiente de correlación de Pearson pasa de 0,39 a 0,94, un incremento muy importante que confirma la impresión que producen los diagramas de dispersión.

d. Contraste de hipótesis sobre el coeficiente de correlación de Pearson.

1. *Hipótesis*: H_0: $\rho_{XY} = 0$; H_1: $\rho_{XY} \neq 0$ (contraste bilateral).
2. *Supuestos*: asumimos que los 12 pares de puntuaciones constituyen una muestra aleatoria de una población normal.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.14]): $T = \dfrac{0{,}94\sqrt{12-2}}{\sqrt{1-0{,}94^2}} = 8{,}71.$

4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n - 2 = 12 - 2 = 10$ gl (t_{10}).
5. *Zona crítica*: $T \leq t_{10;\,0,025} = -2{,}228$ y $T \geq t_{10;\,0,975} = 2{,}228$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (8,71) es mayor que el punto crítico derecho (2,228), se rechaza H_0. Por tanto, puede afirmarse que las puntuaciones de los gemelos en agresividad están linealmente relacionadas.
7. *Nivel crítico*: $p = 2\,[P\,(T \geq 8{,}71)] < 0{,}001$.

11.6. Sabemos que el contraste es unilateral derecho y que el estadístico del contraste deja por encima de sí una proporción de área igual a $1 - 0{,}93 = 0{,}07$. Por tanto, como $p = 0{,}07$ es mayor que $\alpha = 0{,}01$, la decisión razonable es rechazar H_0. Eso descarta las alternativas *a*, *c* y *e*.

La alternativa *b* es falsa porque afirma que se mantiene H_0 a partir de la comparación entre la probabilidad acumulada hasta el estadístico del contraste (que vale 0,93) y la probabilidad asociada a la zona crítica (que está a la derecha); es cierto que 0,93 es mayor que 0,01, pero esa comparación no tiene sentido. Sólo nos queda la alternativa *e*; y, aunque en ella no se está afirmando que se mantiene H_0 porque $p > \alpha$ (es decir, porque $0{,}07 > 0{,}01$), se está afirmando algo equivalente: $1 - p < 1 - \alpha$ (es decir, que $0{,}93 < 0{,}99$); y ésta es, efectivamente, la razón por la cual debe mantenerse H_0.

11.7. *a*. H_0: $\rho_{XY} \leq 0$; H_1: $\rho_{XY} > 0$.

b. No. El no rechazo de H_0 significa que no es posible afirmar que las variables estén linealmente relacionadas.

11.8. *a*. Sí, porque $p = P\,(T \leq -2) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 < 0{,}05$.

b. Sí. El rechazo de H_0 implica que las variables están relacionadas. Además, sabemos que la relación es negativa (contraste unilateral izquierdo).

11.9. Los resultados del ejercicio anterior indican que entre rigidez y creatividad existe relación lineal. Esto descarta la alternativa *a*. En las alternativas *b* y *c* se está afirmando que la relación detectada es de tipo causal; y ya sabemos que para hacer este tipo de afirmaciones no basta con tomar una muestra de sujetos y medir dos variables.

Pero los resultados del ejercicio anterior no sólo indican que existe relación lineal, sino que ésta es negativa (o inversa). Esto significa que las puntuaciones altas en rigidez tienden a ir acompañadas de puntuaciones bajas en creatividad. En consecuencia, únicamente la alternativa *e* nos sirve de conclusión.

11.10. La información disponible indica que el contraste es unilateral derecho y que por encima del estadístico $T = 2{,}12$ se encuentra un área de tamaño 0,02. Esto significa que las decisiones que se tomen van a depender del nivel de significación que se adopte: un nivel de significación de 0,05 llevará a rechazar H_0; un nivel de significación de 0,01 llevará a mantener H_0.

La alternativa *a* es incorrecta, pues $0{,}02 < 0{,}05$ y eso debe llevar a rechazar H_0, no a mantenerla. Tampoco la alternativa *b* es correcta.; puesto que $0{,}02 > 0{,}01$, se debe mantener H_0 y concluir que no existe evidencia de relación lineal entre X e Y, y esto es justamente lo contrario de lo que afirma la alternativa *b*. La alternativa *c* es incorrecta por la misma razón que la *a*: cualquier nivel de significación mayor que 0,02 debe llevar a rechazar H_0, no a mantenerla. Y también la alternativa *d* es incorrecta: si α toma un valor menor que 0,02, no podrá rechazarse H_0. La única alternativa correcta es la *e*: la decisión razonable con $\alpha = 0{,}05$ es rechazar H_0 y concluir, tal como se hace en la alternativa *e*, que entre X e Y existe relación lineal positiva.

Capítulo 12

12.1. Contraste sobre dos medias independientes asumiendo varianzas iguales.

1. *Hipótesis*: $H_0: \mu_1 = \mu_2$
   $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (contraste bilateral)
2. *Supuestos*: se tienen dos muestras aleatorias extraídas de poblaciones normales cuyas varianzas se asumen iguales.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.7]):

$$T = \frac{(5-6)-0}{\sqrt{[(4(2{,}92)^2 + 7(2{,}14)^2)/(5+8-2)]\,(1/5+1/8)}} = -0{,}72$$

4. *Distribución muestral*: T se distribuye según t con $n_1 + n_2 - 2 = 5 + 8 - 2 = 11$ grados de libertad.
5. *Zona crítica*: $T \leq t_{11;\,0{,}025} = -2{,}201$ y $T \geq t_{11;\,0{,}975} = 2{,}201$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico de contraste $(-0{,}72)$ se encuentra dentro de la zona de aceptación $(-2{,}201 < -0{,}72 < 2{,}201)$, se mantiene H_0. Por tanto, no es posible afirmar que el tipo de instrucciones afecte a la ejecución de la tarea.
7. *Nivel crítico*: $p = 2\,[P(T \leq -072)] \approx 2\,(0{,}25) \approx 0{,}50$.

12.2. Contraste sobre dos medias independientes no asumiendo varianzas iguales.

1. *Hipótesis*: $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$
   $H_1: \mu_1 < \mu_2$ (contraste unilateral izquierdo)

   El contraste se plantea unilateral izquierdo porque el interés del estudio está en averiguar si el grupo 1 puntúa en afrontamiento más bajo que el grupo 2.
2. *Supuestos*: se tienen dos muestras aleatorias procedentes de poblaciones normales cuyas varianzas no se asumen iguales.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.10]):

$$T' = \frac{39{,}5 - 43 - 0}{\sqrt{20/20 + 15/60}} = -3{,}13$$

4. *Distribución muestral*: T' se distribuye según t con 29 grados de libertad (t_{29}), pues aplicando la ecuación [12.11] se obtiene

$$gl' = \frac{(20/20 + 15/60)^2}{(20/20)^2/19 + (15/60)^2/59} = 29{,}1$$

5. *Zona crítica*: $T' \leq t_{29;\,0{,}01} = -2{,}462$.
6. *Decisión*: el valor del estadístico del contraste $(-3{,}13)$ es menor que el punto crítico $(-2{,}462)$; por tanto, se rechaza H_0. Puede concluirse que el nivel de afrontamiento medio es más bajo en las mujeres que han sufrido abuso sexual (grupo 1) que en las mujeres que no lo han sufrido (grupo 2).
7. *Nivel crítico*: $p = P(T \leq -3{,}13) < 0{,}005$.

12.3. Contraste sobre dos medias independientes no asumiendo varianzas iguales.

1. *Hipótesis*: $H_0: \mu_{\text{introvertidos}} = \mu_{\text{extrovertidos}}$
   $H_1: \mu_{\text{introvertidos}} \neq \mu_{\text{extrovertidos}}$ (contraste bilateral)

2. *Supuestos*: se tienen dos muestras aleatorias procedentes de poblaciones normales cuyas varianzas no se asumen iguales.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.10]):

$$T' = \frac{3{,}5 - 6{,}3 - 0}{\sqrt{1{,}8^2/22 + 3{,}2^2/16}} = -3{,}16$$

4. *Distribución muestral*: T' se distribuye según t con 22 grados de libertad (t_{22}), pues aplicando la ecuación [12.11] se obtiene

$$gl' = \frac{(1{,}8^2/22 + 3{,}2^2/16)^2}{(1{,}8^2/22)^2/21 + (3{,}2^2/16)^2/15} = 21{,}9$$

5. *Zona crítica*: $T \leq t_{22;\,0{,}025} = -2{,}074$ y $T \geq t_{22;\,0{,}975} = 2{,}074$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (−3,16) es menor que el punto crítico de la cola izquierda (−2,074), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que el rendimiento medio de los introvertidos y los extrovertidos en la tarea de solución de problemas no es el mismo, lo cual significa que difieren en su resistencia a experimentar indefensión.
7. *Nivel crítico*: $p = 2\,[P(T \leq -3{,}16)] < 2\,(0{,}005) \;\rightarrow\; p < 0{,}01$.

12.4. Contraste sobre dos medias independientes no asumiendo varianzas iguales.

1. *Hipótesis*: $H_0: \mu_A = \mu_B$
   $H_1: \mu_A \neq \mu_B$ (contraste bilateral)

   El contraste se plantea unilateral izquierdo porque el interés del estudio está en averiguar si el grupo experimental puntúa en afrontamiento más bajo que el grupo control.
2. *Supuestos*: se tienen dos muestras aleatorias procedentes de poblaciones normales cuyas varianzas no se asumen iguales.
3. *Estadístico del contraste* (ecuación [12.10]):

$$\bar{A} = 800/10 = 80$$

$$\bar{B} = 680/10 = 68$$

$$S_A^2 = \frac{(82-80)^2 + (78-80)^2 + \cdots + (70-80)^2}{9} = 95{,}11$$

$$S_A^2 = \frac{(72-68)^2 + (68-68)^2 + \cdots + (70-68)^2}{9} = 77{,}11$$

$$T' = \frac{80 - 68 - 0}{\sqrt{95{,}11/10 + 77{,}11/10}} = 2{,}89$$

4. *Distribución muestral*: T' se distribuye según t con 18 grados de libertad (t_{18}), pues aplicando la ecuación [12.11] se obtiene

$$gl' = \frac{(95{,}11/10 + 77{,}11/10)^2}{(95{,}11/10)^2/9 + (77{,}11/10)^2/9} = 17{,}81$$

5. *Zona crítica*: $T \leq t_{18;\,0{,}025} = -2{,}101$ y $T \geq t_{22;\,0{,}975} = 2{,}101$.
6. *Decisión*: como el valor del estadístico del contraste (2,89) es mayor que el punto crítico de la cola derecha (2,101), se rechaza H_0. Por tanto, puede concluirse que el rendimiento medio en los

dos exámenes no es el mismo. Este resultado apoya la sospecha del educador de que el orden de las preguntas afecta al rendimiento de los sujetos.

7. *Nivel crítico*: $p = 2\,[P(T \geq 2{,}89)] \approx 2\,(0{,}05) \approx 0{,}01$.

12.5. En el ejercicio 12.1 se dice explícitamente que las poblaciones muestreadas son normales; por tanto, es correcto asumir normalidad. En los ejercicios 12.2 y 12.3 no se conoce la forma de las poblaciones muestreadas, pero en ambos casos los tamaños muestrales son lo bastante grandes como para poder asumir normalidad sin que esto perjudique el comportamiento del estadístico T (ver el apartado *Independencia, normalidad e igualdad de varianzas*). Por último, aunque los tamaños muestrales utilizados en el ejemplo del ejercicio 12.4 no son grandes, ocurre que, además de ser iguales, las distribuciones son razonablemente simétricas y no hay presencia de casos atípicos (ambas cosas pueden comprobarse fácilmente con unos diagramas de caja); por tanto, tampoco en este caso es incorrecto asumir que las poblaciones muestreadas son normales.

12.6. Intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias independientes (con $\alpha = 0{,}01$). Puesto que no se está asumiendo que las varianzas poblacionales sean iguales, el error típico de la diferencia entre las medias ($\hat{\sigma}_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}$) hay que calcularlo a partir de la ecuación [12.9] (no a partir de la ecuación [12.4]). En realidad, este error típico ya lo hemos calculado (es el denominador del estadístico T' del ejercicio 12.2):

$$\hat{\sigma}_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sqrt{20/20 + 15/60} = 1{,}12$$

Por tanto, $$IC_{|\mu_{Y_1} - \mu_{Y_2}|} = |\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2| \pm t_{gl;\,1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = |39{,}5 - 43| \pm t_{29;\,0{,}995}\,(1{,}12) =$$
$$= 3{,}5 \pm 2{,}756\,(1{,}12) = 3{,}5 \pm 3{,}09 = (0{,}41;\ 6{,}59)$$

La estrategia idónea para aumentar la precisión de un intervalo consiste en aumentar el tamaño de las muestras. Pero, como eso es algo que no podemos hacer aquí, nos queda la alternativa de disminuir el nivel de confianza. Si en lugar de utilizar un nivel de confianza de 0,99 se utiliza un nivel de confianza de 0,95, el intervalo se estrecha hasta (1,21; 5,79).

12.7. *a*. Mantenerla.
b. Porque 0,955 > 0,05 (debe repararse en el hecho de que el estadístico del contraste y la zona crítica se encuentran en colas opuestas de la distribución muestral).
c. Nivel crítico: $p = 0{,}955$.

12.8. Con $\alpha = 0{,}01$, el valor del estadístico del contraste (1,984) cae fuera de la zona crítica porque, siendo el contraste unilateral derecho, el punto crítico vale 2,365. La decisión que debe tomarse es, por tanto, mantener H_0. Esto descarta como correctas las alternativas *a*, *c* y *e*. En la alternativa *b* se está tomando la decisión correcta pero basada en un argumento equivocado: aunque es cierto que 1,984 > 1,660, esto no tiene nada que ver con el motivo por la cual se mantiene H_0. Y en la alternativa *d* ocurre algo parecido: se está tomando la decisión correcta basada en un argumento equivocado, pues cuando un estadístico de contraste cae en la zona crítica no debe mantenerse H_0, sino rechazarse. En conclusión, ninguna de las alternativas es correcta.

12.9. El estadístico T cae en la cola izquierda de su distribución muestral, muy alejado de la zona crítica (el contraste es unilateral derecho). Por tanto lo razonable es mantener H_0. Esto descarta las alternativas *a* y *d*, y deja como buena la *c*. Un contraste no informa sobre la probabilidad de H_0 (esto descarta la alternativa *b*). Por último, si H_0 es verdadera y se mantiene no se estará cometiendo ningún error (esto descarta la alternativa *e*).